HÖGSKOLAN I GÄVLE
TM-Matematik
Mikael Forsberg 0734-412331
Pär Hemström 026-648962

För ingenjörs och distansstudenter
Envariabelanalys
ma034a
2012 06 04

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Beräkna följande gränsvärden

   a.) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2-4}$ b.) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+12}{4x-x^3}$ c.) $\lim_{x\to\infty} \frac{-7x^2-5x+6}{15-8x+3x^2}$

2. Derivera följande funktioner (och förenkla)

   (a) $f(x) = -\frac{x^2}{2} + x^2 \ln x$ (b) $g(x) = \frac{1-4x^2}{x^3}$ (c) $h(x) = e^{\cos 4x}$

3. Låt $f(x) = \frac{1}{x-1}$

   (a) Beräkna $f^{-1}(x)$.
   (b) Beräkna sammansättningen $f^{-1}(f(x))$ och rita dess graf.

4. Bestäm eventuella extrempunkter, inflexionspunkter samt horizontella och vertikala asymptoter till
$$y = 1 + \frac{2}{x}.$$
   Rita funktionens graf.

5. (a) Beräkna andra ordningens Taylorpolynom till $\sqrt{x}$ utvecklad i en godtycklig punkt a.
   (b) Beräkna ett närmevärde till $\sqrt{17}$ genom att använda en andra ordningens Taylorutveckling av rotfunktionen, kring en lämpligt vald punkt.
   (c) Gör en uppskattning av hur stort felet/osäkerheten i denna approximation blir?

6. Beräkna integralerna

   (a) $\int x^2 \cos x^3 dx$.
   (b) $\int x^2 \cos x dx$.

7. Beräkna integralen
$$\int \frac{x^2+1}{x^3+6x^2+11x+6} dx$$

8. Ett område i planet begränsas av linjerna $x + y = 6$ och $y = 0$ samt linjerna $x = 1$ och $x = 4$. *Beräkna volymen som området ger när det roteras kring x-axeln*[1]. Rita figur.

[1] Meningen om rotationsvolym hade råkat falla bort i den version som gavs ut vid tentamen. Vid rättning och poängsättning kommer det att tas hänsyn till detta, med korrigerade betygsnivåer osv.

Svar till tentamen i Envariabelanalys, 2012 06 04.

1. (a) $3/4$ (b) 0 (c) $-\frac{7}{3}$

2. (a) $f'(x) = 2x \ln x$ (b) $g'(x) = \dfrac{4x^2 - 3}{x^4}$ (c) $h'(x) = -4e^{\cos 4x} \sin 4x$

3. (a) $1 - \frac{1}{x}$

   (b) $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \neq 1$.

4. Inga extrempunkter, inga inflexionspunkter, horisontell asymptot $y = 1$, vertikal asymptot $x = 0$.

5. (a) $\sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a) - \frac{1}{8\underbrace{a\sqrt{a}}_{=a^{3/2}}}(x-a)^2$

   (b) $4 + \frac{1}{8}(x-16) - \frac{1}{512}(x-16)^2$, $\sqrt{17} \approx \frac{2111}{512}$

   (c) $\frac{1}{16384}$

6. (a) $\frac{1}{3}\sin x^3 + C$

   (b) $x^2 \sin x + 2x \cos x - \sin x + C$

7. $\ln|x+1| - 5\ln|x+2| + 5\ln|x+3| + C$

8. Volymen är 39π volymsenheter.

Lösningar till tentamen i Envariabelanalys, 2012 06 04.

1. (a) Börja med att faktorisera täljare och nämnare:

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-4} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x-2} \quad \text{som går mot} \quad \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \;\; \text{då } x \to -2$$

(b) Här noterar vi att täljarpolynomets gradtal är mindre än nämnarpolynomets gradtal. Detta leder till att nämnaren växer snabbare än täljaren och då x blir stor så dividerar vi med ett allt större tal och så småning om får vi noll. Tekniskt kan vi dividera både täljare och nämnare med den termen som blir störst, dvs x^3:

$$\frac{x^2+12}{4x-x^3} = \frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{12}{x^3}}{\frac{4x}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}} \quad \text{som går mot} \quad \frac{0+0}{0-1} = 0, \;\text{då } x \to \infty$$

(c) Även i denna uppgift studeras ett gränsvärde då $x \to \infty$, så här gör vi samma trick som i föregående uppgift, dvs dividera med största termen. Här växer nämnare och täljare lika snabbt eftersom de båda är polynom av grad 2. Det betyder att täljare och nämnare är balanserade och då förväntar man sig ett ändligt nollskillt gränsvärde:

$$\frac{-7x^2-5x+6}{15-8x+3x^2} = \frac{-\frac{7x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{15}{x^2}-\frac{8x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}} \text{ som går mot } \frac{-7+0+0}{0+0+3} = -\frac{7}{3}$$

2. (a) Additions och produktreglerna ger oss

$$f'(x) = -\frac{2x}{2} + 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = -x + 2x\ln x + x = 2x\ln x$$

(b) Här är det kvotregeln som gäller:

$$g'(x) = \frac{(-8x)\cdot x^3 - (1-4x^2)\cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{4x^4-3x^2}{x^6} = \frac{4x^2-3}{x^4}$$

(c) I denna uppgift är $\cos 4x$ sammansatt med e^x och vi behöver därför använda oss av kedjeregeln. e^x är den yttre funktionen och $\cos 4x$ är den inre. Notera också att $cos 4x$ också är sammansatt där vi behöver komma ihåg inre derivatan som är 4.

$$h'(x) = e^{\cos 4x}\cdot(-\sin 4x)\cdot 4 = -4e^{\cos 4x}\sin 4x$$

3. (a) För att beräkna inversen så sätter vi $y = f(x)$ och löser ut x:

$$y = \frac{1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad (x-1)y = 1 \quad \Rightarrow \quad x-1 = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad x = 1+\frac{1}{y}$$

För att skriva inversen som en funktion av x så gör vi bytet $x \leftrightarrow y$ (en spegling i $y = x$) och får då

$$f^{-1}(x) = 1+\frac{1}{x} = \text{ som också kan skrivas } = \frac{x+1}{x}$$

(b) Alternativ 1 Eftersom f och f^{-1} är varandras inverser så gäller $f^{-1}(f(x)) = x$ för alla x där $f(x)$ är definierad vilket alltså är alla reella tal utom $x = 1$.

Alternativ 2 Beräkna $f^{-1}(f(x))$ explicit:

$$f^{-1}(f(x)) = 1+\frac{1}{f(x)} = [\text{ förutsatt att } x \neq 1] = 1+\frac{1}{\frac{1}{x-1}} = 1+(x-1) = x$$

Grafen blir helt enkelt den räta linjen $y = x$ men med punkten $(1,1)$ borttagen, vilket visas i figur 1.

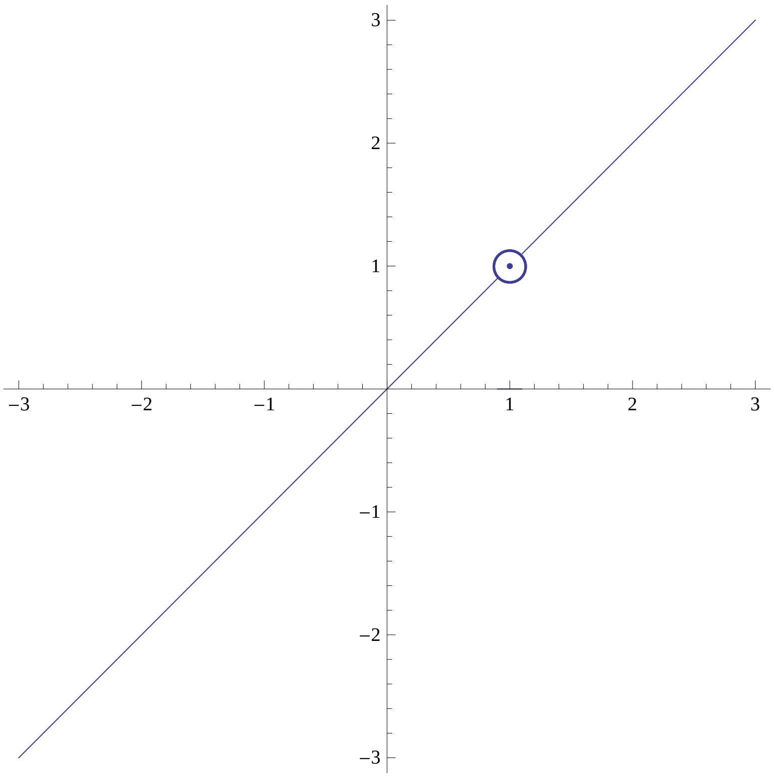

Figure 1: Här är grafen till $f^{-1}(f(x))$. Notera att eftersom f ej är definierad i $x = 1$ så har grafen inget värde för denna punkt, indikerat med symbolen $\odot$.

4. Vi presenterar lösningen stegvis:

Extrem och inflexionspunkter

För att beräkna extrempunkter och inflexionspunkter så behöver vi beräkna nollställen till första och andraderivatorna. Vi börjar därför med att derivera:

$$y' = -\frac{2}{x^2}, \qquad \text{och} \qquad y'' = \frac{4}{x^3}$$

Eftersom varken första eller andraderivatan har några nollställen så förstår vi att vår graf inte har varken extrempunkter eller inflexionspunkter.

Asymptoter:

Eftersom funktionen inte är definierad i $x = 0$, vilket också gäller för funktionens derivator så har vi singularitet och veritkal asymptot då $x = 0$. För horisontell asymptotik så behöver vi studera hur funktionen beter sig i oändligheten.

$$\lim_{x \to \pm\infty} 1 + \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} = 1$$

vilket ger att $y = 1$ är horisontell asymptot.

Teckenstudium:

Grafritning: Mha teckenstudiet, asymptoterna och kanske konkret räkning av några värden kan ge en graf som liknar figur 2 som är genererad med Mathematica.

x	$x<0$	0	$x>0$
y	$\searrow$	ej def	$\searrow$
y'	$-$	ej def	$-$
y	$\frown$	ej def	$\smile$
y”	$-$	ej def	$+$

Table 1: teckenstudium

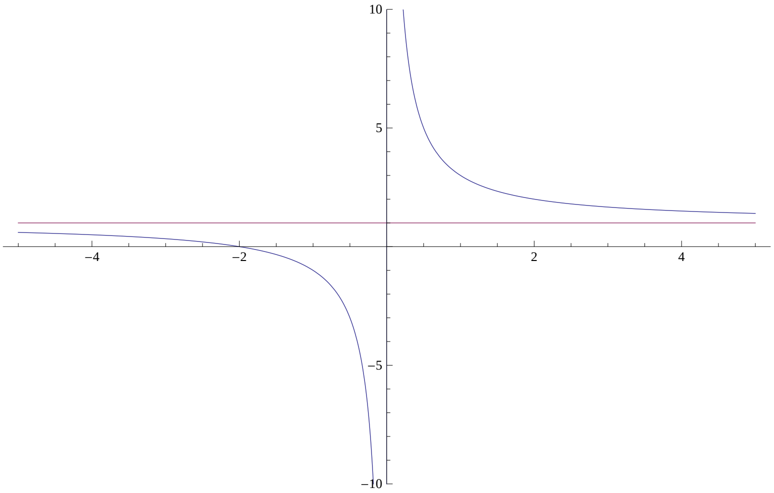

Figure 2: Grafen till funktionen $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ i uppgift 4.

5. (a) Taylors formel ger att andra ordningens Taylorpolynom till $f(x) = \sqrt{x}$, utvecklad kring $x = a$, blir

$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 =$$
$$= \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a) - \frac{1}{8\underbrace{a\sqrt{a}}_{=a^{3/2}}}(x-a)^2$$

(b) Eftersom vi ska beräkna ett närmevärde till $\sqrt{17}$ så är det lämpligt att utveckla $\sqrt{\ x\ }$ kring ett värde på x som dels ligger nära 17 och som dels är lätt att beräkna när vi stoppar in i det approximerande polynomet. $x = 16$ har båda dessa egenskaper och vi får att $\sqrt{x}$ approximeras av

$$p_2(x) = \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}(x-16) - \frac{1}{8\cdot 16\sqrt{16}}(x-16)^2 = 4 + \frac{1}{8}(x-16) - \frac{1}{512}(x-16)^2$$

som ger att

$$\sqrt{17} \approx 4 + \frac{1}{8}(17-16) - \frac{1}{512}(17-16)^2 = 4 + \frac{1}{8} - \frac{1}{512} = \frac{2111}{512}$$

(c) För att beräkna feltermen så noterar vi att tredjederivatan till $\sqrt{x}$ blir

$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$$

Feltermen enligt Taylors sats blir då

$$E_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3 = \frac{1}{16c^2\sqrt{c}}(x-a)^3,$$

där c ligger mellan x och a. Om $x = 17$ och $a = 16$ så får vi att felet ges av

$$\frac{1}{16c^2\sqrt{c}} = G(c), \qquad 16 \leqslant c \leqslant 17$$

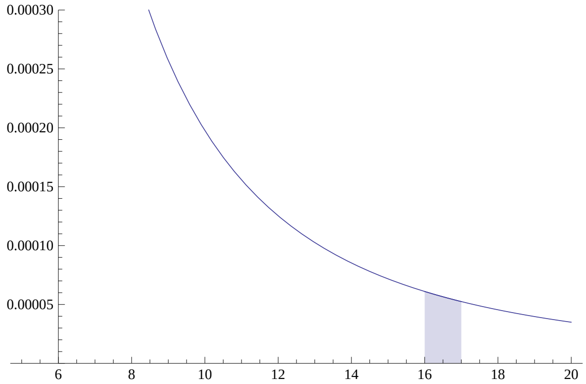

Figure 3: I denna figur plottas grafen till $G(c)$ och visar hur felet beror av parametern c. Från Taylors sats vet vi att c måste ligga mellan 16 och 17 och för vår feluppskattning ser vi att detta betyder att felet kan högst bli värdet av $G(c)$ då $c = 16$.

Eftersom vi har $c^{5/2}$ i nämnaren så i gäller att detta uttryck avtar som funktion av c (se även figur 3) och eftersom $c \in [16, 17]$ så får vi att felet måste vara störst i den nedre gränsen 16. Mao felet i vår approximation är högst

$$G(16) = \frac{1}{16 \cdot 256 \cdot 4} = \frac{1}{16384}$$

6. (a) Utför substitutionen $u = x^3$, $du = 3x^2dx$ så förvandlas vår integral till

$$\frac{1}{3}\int \cos u du = \frac{1}{3}\sin u = \frac{1}{3}\sin x^3 + C$$

(b) Här partialintegrerar vi i två steg

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x = x^2 \sin x - 2[-x\cos x + \int \cos x dx] =$$
$$= x^2 \sin x - 2[-x \cos x + \sin x] = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

7. Börja med att beräkna nollställena för täljare och nämnare. Täljarens nollställen är ickereella ($= \pm i$) så ingen ytterligare reell faktorisering är möjlig.
Nämnarens nollställen är -1, -2 och -3 som vi får fram genom att gissa på alla heltalsdelare (faktorer) till nämnarens konstantterm 6. Heltalsdelarna är ± 1, $\pm 2, \pm 3, \pm 6$. Dessa tal sätts in i nämnarpolynomet, de tal som ger noll är våra nollställen (se tabell 1).

Detta betyder att nämnaren faktoriseras enligt

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x+2)(x+3)$$

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$x^3+6x^2+11x+6$	-60	0	0	0	24	60	120	504

Table 2: Resultatet av att beräkna nämnarpolynomet i de heltal som delar konstanttermen.

och då kan vi lösa integralen genom partialbråksuppdelning och handpåläggning:

$$\frac{x^2+1}{x^3+6x^2+11x+6} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

Handpåläggning ger oss $A = 1$, $B = -5$ och $C = 5$. Integralen blir därför

$$\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{5dx}{x+2} + \int \frac{5dx}{x+3} = \ln|x+1| - 5\ln|x+2| + 5\ln|x+3| + C$$

8. Vi noterar först att vi kan skriva linjen $x + y = 6$ på standardform enligt $y = 6 - x$. Vi ritar upp området som skall roteras kring x-axeln i figur 4.

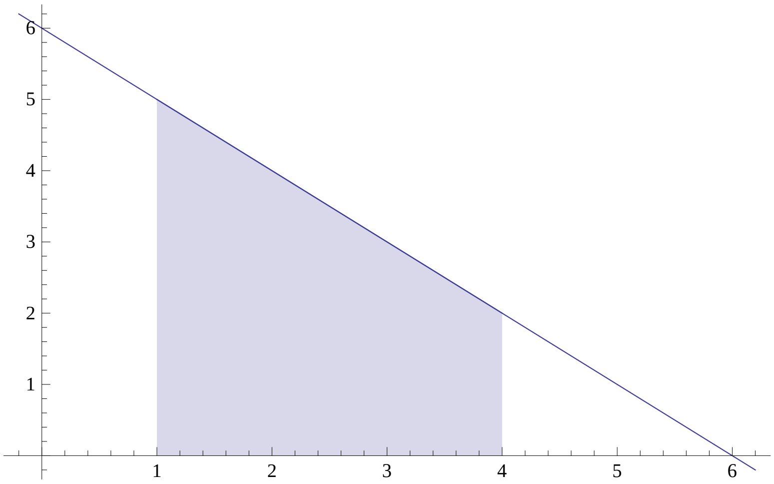

Figure 4: Här visas området som skall roteras kring x-axeln

Rotationsvolymen ges av

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^4 [6-x]^2 dx = \pi \int_1^4 36 - 12x + x^2 dx = \pi \left[36x - 6x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_1^4 =$$

$$= \pi[(144 - 96 + \frac{64}{3}) - (36 - 6 + \frac{1}{3})] = 39\pi$$