HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
0734-412331

VT2015
ENVARIABELANALYS
ma034a
2015 06 02

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara noggrannt motiverade och prydligt nedskrivna. Ofullständig motivering kan ge poängavdrag.

Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor.
Skriv namn på varje inlämnat blad.

FRÅGORNA 1 TILL 6 SKA SVARAS MED SANT ELLER FALSKT OCH GER VARDERA 1 POÄNG.

1. En funktion som är kontinuerlig är också deriverbar.

2. En primitiv funktion till $f(x)$ är en funktion vars derivata är lika med $\int f(x)dx$

3. För att derivera kvoten $\frac{g(x)}{f(x)}$ så använder man kvotregeln
$$\frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2}$$

4. Om en funktion antar värdena y=-5 samt y=5 så vet man att den någonstans antar värdet y=2

5. Låt $f(x)$ vara minst 3 gånger kontinuerligt deriverbar i intervallet $[-3,3]$. Då gäller att om grafen till $f(x)$ har en inflektionspunkt i $x = 2$ så är $f''(2) = 0$.

6. Om en funktion $f(x)$ är växande på intervallet $[0,1]$ och avtagande på $[1,2]$ så har funktionen en invers på intervallet $[0,2]$.

FRÅGORNA 7-9 GER 3 POÄNG VARDERA OCH KRÄVER FULLSTÄNDIGA LÖSNINGAR.

7. Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$$

8. Beräkna derivatan till funktionen
$$f(x) = \ln(\arctan(2x^3))$$

9. Beräkna integralen
$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

UPPGIFTERNA 10 -14 KRÄVER FULLSTÄNDIGA OCH VÄL MOTIVERADE LÖSNINGAR. UPPGIFTERNA GER 5 POÄNG VARDERA

10. Beräkna integralen
$$\int_4^5 \frac{x-5}{x^2-4x+3}dx$$

11. Rita Grafen till $f(x) = x^2e^x$. Klassificera alla kritiska punkter, bestäm inflektionspunkter samt eventuella asymptoter.

12. Beräkna arean av det obegränsade område ($x \geq 2$) som ligger mellan graferna till funktionerna $f(x) = \frac{\sqrt{3x}}{x^6}$ och $g(x) = \frac{\sqrt{2x}}{x^4}$. Rita och markera området.

13. Betrakta arean för det område som begränsas av $y = \sin x$ då $0 \leq x \leq \pi$. Låt området ha konstant densitet $\delta(x) = 1$ och beräkna områdets masscentrum (eller centroiden som den också kallas när vi har konstant densitet).

14. Beräkna andra och tredje gradens MacLaurinpolynom, $p_2(x)$ respektive $p_3(x)$ till funktionen $f(x) = \cos x$. Uppskatta de fel $E_2(x)$ och $E_3(x)$ som MacLaurinutvecklingen ger om vi använder polynomen för att beräkna ett närmevärde till $\cos \pi/3$ med hjälp av de båda polynomen.

    Använd att $\cos \pi/3 = \frac{1}{2}$ för att beräkna det exakta felet. Jämför detta exakta fel med de uppskattade felen och ange, om möjligt, vilket av de skattade felen som ligger närmast detta exakta fel.

Svar till tentamen i Envariabelanalys, 2015 06 02.

1. Falskt.

2. Falskt

3. sant.

4. Falskt

5. Sant.

6. falskt

7. $\frac{3}{4}$

8. $$\frac{6x^2}{(4x^6+1)\arctan(2x^3)}$$

9. $-2\cos\sqrt{x}+K$

10. $\ln\frac{8}{9}$

11. **Kritiska punkter::** $x=-2$ (max) $x=0$ (min). **Inflexion ::** $x=-2\pm\sqrt{2}$ (teckenstudium påvisar inflektion) **Asymptoter ::** x-axeln.

12. $\frac{\sqrt{3}}{72\sqrt{2}}-\frac{1}{10}$

13. Masscentrum ligger i punkten $(\bar{x},\bar{y})=(\pi/2,\pi/8)$

14. $p_2(x)=p_3(x)=1-\frac{x^2}{2}$, $|E_2(\pi/3)|\le\frac{\pi^3}{162}$, $|E_3(\pi/3)|\le\frac{\pi^4}{1944}$,
Verkliga felet $=\frac{\pi^2-9}{18}$

Lösningar till tentamen i Envariabelanalys, 2015 06 02.

1. Funktionen $|x|$ är kontinuerlig i origo men inte deriverbar i origo. Alltså finns det kontinuerliga funktioner som inte är deriverbara och påståendet är falskt. Däremot är alla deriverbara funktioner också kontinuerliga.

2. En primitiv funktion till $f(x)$ är en funktion vars derivata är lika med $f(x)$.

3. I denna uppgift har bara namnen för täljare och nämnare bytts ut. Normal beteckning är dock att ha $f(x)$ i täljaren och $g(x)$ i nämnaren.

4. För att detta ska gälla så måste funktionen vara kontinuerlig och då har vi att satsen om mellanliggande värden (intermediate value theorem) garanterar detta. Men detta gäller inte för vilken funktion som helst. Funktioner kan vara hur konstiga som helst bara de spottar ut ett unikt värde för alla definierade inputvärden.

5. Följer av Theorem 9 i kapitel 4.5 i Adams.

6. En funktion har invers på ett intervall om funktionen är antingen växande eller avtagande på hela intervallet.

7. Antingen kan man faktorisera både täljare och nämnare:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+2}=\frac{3}{4}.$$

Eller så kan man notera att kvoten går mot [0/0], vilket gör att man kan använda L'Hôpitals regler::

$$\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{x^2-x-2}^{=f(x)}}{\underbrace{x^2-4}_{=g(x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'x}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{2x}=\frac{3}{4}$$

8. Kedjeregeln ger att

$$f'(x)=\frac{1}{\arctan 2x^3}\cdot\frac{1}{1+(2x^3)^2}\cdot 6x^2=\frac{6x^2}{(1+4x^6)\arctan(2x^3)}$$

9.

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=$$

$$=[\text{ Subst }::\ u=\sqrt{x}, du=\frac{dx}{\sqrt{x}}]=$$

$$=2\int\sin u du=2(-\cos u)+K=-2\cos\sqrt{x}+K$$

10. Vi börjar med att faktorisera nämnaren. Genom kvadratkomplettering eller pq-formeln så är det inte svårt att få fram att $x=1$ och $x=3$ är nollställen till nämnarpolynomet, vilket ger att integranden med Partialbråksuppdelningsansats blir

$$\frac{x-5}{x^2-4x+3}=\frac{x-5}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$$

Handpåläggning eller annan metod ger oss att $A = 2$ och $B = -1$, vilket ger att vår integral blir

$$\int_4^5 \frac{x-5}{x^2-4x+3}dx = 2\int_4^5 \frac{dx}{x-1} - \int_4^5 \frac{dx}{x-3} = 2\left[\ln|x-1|\right]_4^5 - \left[\ln|x-3|\right]_4^5 =$$
$$= 2(\ln 4 - \ln 3) - (\ln 2 - \ln 1) = \ln\frac{16}{9} - \ln 2 =$$
$$= \ln\frac{8}{9}$$

11. Vi noterar först att funktionen är positiv och har horizontell asymptot $y = 0$ då $x \to -\infty$. Derivatan blir

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = x(2+x)e^x$$

Eftersom e^x inte blir noll så får vi att vår funktion har två kritiska punkter: $x = 0$ och $x = -2$. För att klassificera så beräknar vi andraderivatan ::

$$f''(x) = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x = (2+2z+x^2)e^x = (x-(-2+\sqrt{2})(x-(-2-\sqrt{2})e^x$$

Detta ger att andra derivatan är noll då $x = -2 \pm \sqrt{2}$. Eftersom andraderivatan byter tecken i dessa två punkter så har vi inflexion i dessa punkter. Detta kan vi se i teckenstudiet:

x		$-2-\sqrt{2}$		-2		$-2+\sqrt{2}$		0	
x	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$x+2$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
e^x	+	+	+	+	+	+	+	+	+
f'	+	+	+	0	-	-	-	+	0
$x-(-2-\sqrt{2})$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$x-(-2+\sqrt{2})$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
f''	+	0	-	-	-	0	+	+	+
f	$\nearrow$	inflex	$\nearrow$	max	$\searrow$	inflex	$\searrow$	min	$\nearrow$

Table 1: default

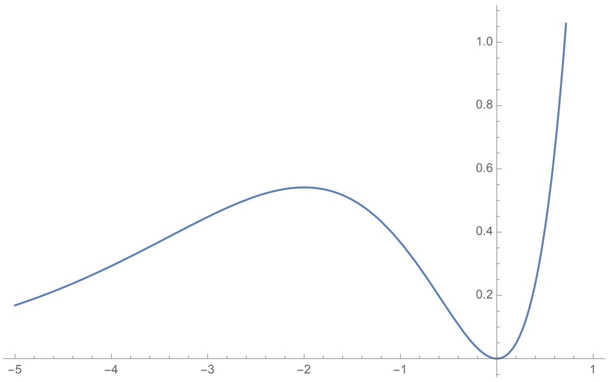

Figure 1: Graf till uppgift 11

12. Vi noterar att $\sqrt{ax} = \sqrt{a}\sqrt{x}$ och att $f(x) < g(x)$ på intervallet $(-2, \infty)$. Då får vi att arean blir

$$A = \int_0^\infty \frac{\sqrt{2x}}{x^4} - \frac{\sqrt{3x}}{x^6} dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \sqrt{2}\ x^{-7/2} - \sqrt{3}\ x^{-11/2} dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[\sqrt{2}\frac{2x^{-5/2}}{-5} - \sqrt{3}\frac{2x^{-9/2}}{-9} \right]_2^R = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{2\sqrt{2}}{5x^{5/2}} + \frac{2\sqrt{3}}{9x^{9/2}} \right]_2^R =$$

$$= \underbrace{\lim_{R\to\infty} \left[-\frac{2\sqrt{2}}{5R^{5/2}} + \frac{2\sqrt{3}}{9R^{9/2}} \right]}_{\to 0,\ R\to\infty} - \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{2\sqrt{2}}{5\cdot 2^{5/2}} + \frac{2\sqrt{3}}{9\cdot 2^{9/2}} \right] =$$

$$= - \left[-\frac{2\sqrt{2}}{5\cdot 2^{5/2}} + \frac{2\sqrt{3}}{9\cdot 2^{9/2}} \right] = \frac{\sqrt{3}}{72\sqrt{2}} - \frac{1}{10}$$

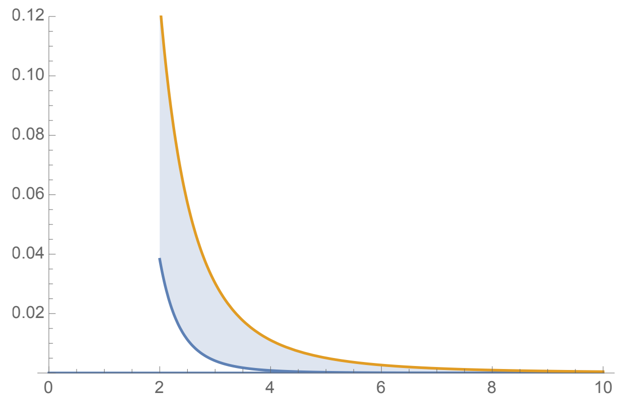

Figure 2: Det oändliga område vars area ska beräknas i uppgift 12

13. Vi börjar med att beräkna massan (som är lika med arean):

$$m = A = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

Sedan räknar vi ut momenten med avseende på våra axlar:

Moment kring y-axeln $$M_{x=0} = \int_0^\pi x\sin x dx = [\text{ partiell integration }] = \\ = [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi cosxdx = \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi$$

Moment kring x-axeln $$M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 xdx = \frac{1}{4}\int_0^\pi 1 - \cos 2xdx = \\ = \frac{1}{4}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{4}[(\pi - 0) - (0 - 0)] = \\ = \frac{\pi}{4}$$

Nu kan vi beräkna masscentrum/centroiden för vårt område:

$$\bar{x} = M_{x=0}/m = \pi/2$$
$$\bar{y} = M_{y=0}/m = \pi/8$$

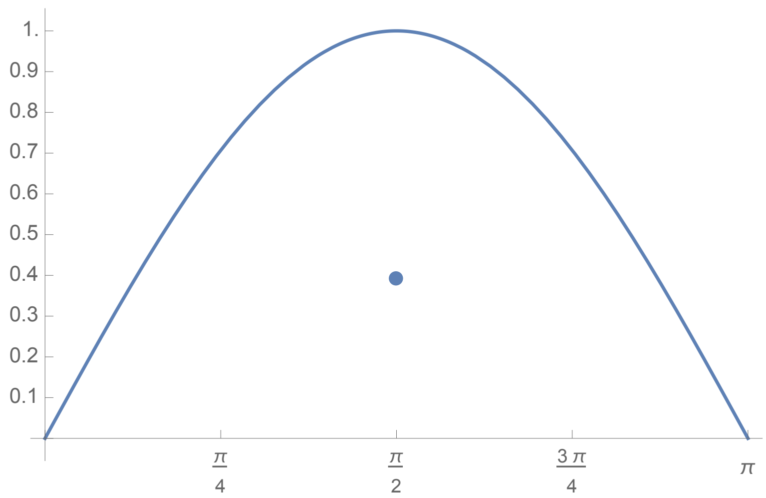

Figure 3: Figur till uppgift 13

14. Genom att använda Taylorutveckling med $a = 0$ så får vi att

$$p_2(x) = p_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad p_2(\pi/3) = p_3(\pi/3) = 1 - \frac{\pi^2}{2 \cdot 3^2} = 1 - \frac{\pi^2}{18}$$

Feltermen för andra gradens MacLaurin::

$$|E_2(x)| = |\frac{f'''(s)}{3!}x^3| = |\sin(s)||\frac{x^3}{6}| \leq |\frac{x^3}{6}|$$

I $x = \pi/3$ har vi alltså absolutfelet ::

$$|E_2(\pi/3)| \leq \frac{\pi^3}{3^3 \cdot 6} = \frac{\pi^3}{162} \approx 0.19$$

Feltermen för tredje gradens MacLaurinpolynom ::

$$|E_3(x)| = |\frac{f^{(iv)}(s)}{4!}x^4| = |\cos(s)||\frac{x^4}{24}| \leq |\frac{x^4}{24}|$$

I $x = \pi/3$ har vi då tredje gradens absolutfel ::

$$|E_3(\pi/3)| \leq \frac{\pi^4}{3^4 \cdot 24} = \frac{\pi^4}{1944} \approx 0.05$$

Nu koncentrerar vi oss på det **exakta felet** $Fel(x)$

$$Fel(x) = \text{ Rätta värdet } - \text{Närmevärdet} = \cos x - (1 - \frac{x^2}{2})$$

För $x = \pi/3$ har vi

$$Fel(\pi/3) = \cos \pi/3 - (1 - \frac{\pi/2}{18}) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{\pi^2}{18} = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2 - 9}{18} \approx 0.0483$$

Vi ser från dessa räkningar att felet för tredje gradens approximation ligger nära och bara lite överskattat jämfört med verkliga felet. Det är alltså tredje gradens approximation som gäller medan andra gradens uppskattning är alldeles för grov (omkring 4 gånger för grov).

I ovan har vi ju räknat ut felen decimalt och då är det lätt att jämföra. På tentan är det ju svårt att få fram sådana siffror. Men man kan räkna lite grovt ::
Om vi övrerskattar: $\pi^2 \approx 10$ får vi att det riktiga felet är ungefär $\frac{1}{18}$, tredje gradens fel blir cirka $\frac{100}{1944} = \frac{1}{19.44}$ och andra gradens fel blir ungefär (med $\pi^3 \approx 30$) $\frac{30}{162} \approx \frac{3}{16} \approx \frac{1}{5}$. Dessa tre tal är lättare att jämföra och det borde vara tydligt att tredjegradens fel ligger på samma fotbollsplan som det rätta felet medan andra gradens felterm ger ett fel som är minst 3 gånger så stort.

fotbollsplan
jmfr Eng.
Same Ballpark

För cosinus (och sinus) så gäller alltså att andra ordningen approximation ger ett bättre närmevärde än det egentligen borde. Detta är en följd av att varannan term i är noll. Andra ordningens approximation ärver alltså felet från den tredje ordningens approximation vilket är väldigt bra eftersom det ger möjligt att få god approximation med lägre gradtal och därmed med mindre hårt arbete.