HÖGSKOLAN I GÄVLE
TM-Matematik
Mikael Forsberg
ovnTenta 1

ENVARIABELANALYS
ma034a

Skrivtid: :: . Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa på de uppgifter som kräver lösning.

FRÅGORNA 1 TILL 6 SKA SVARAS MED SANT ELLER FALSKT OCH GER VARDERA 1 POÄNG.

1. För att derivera kvoten $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ så använder man deriveringsregeln
$$F'(x) = \frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{g(x)^2}$$

2. Om man integrerar en funktion först och sedan deriverar så får man tillbaka samma funktion.

3. Om man först deriverar en funktion och sedan integrerar så får man tillbaka samma funktion.

4. Att integrera en funktion från a till b ger samma svar som att integrera funktionen från b till a.

5. Om
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1, \quad \text{så är} \quad \lim_{x\to 1-} f(x) = -1.$$

6. Om $f''(a) > 0$ i en kritisk punkt $x = a$ så gäller att $f(x)$ har ett minimum i $x = a$.

FRÅGORNA 7-9 GER 3 POÄNG VARDERA

7. Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 7}{8 + 2x - 5x^3}$$

8. Derivera funktionen
$$f(x) = \sqrt{x}\ln x + \ln(\sqrt{x})$$

9. Beräkna integralen
$$I_1 = \int x\sin(x^2)dx$$

Uppgifterna 10 -14 kräver fullständiga och väl motiverade lösningar. Uppgifterna ger 5 poäng vardera

10. Beräkna integralen

$$I = \int_1^e x^3(\ln x)^2 dx \tag{1}$$

11. Beräkna integralen

$$I = \int \frac{x^3+2}{x^3-x} dx$$

12. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2+2x+4}{2x}$ och bestäm eventuella max/min punkter och asymptoter.

13. Låt $h(x) = \sqrt{x}$

    (a) Beräkna andra gradens Taylorpolynom med centrum i 81 för att beräkna en approximation till $\sqrt{80}$.

    (b) Vad blir feltermen?

    (c) Gör en uppskattning av maximala felet.

14. Verifiera genom direkta integralberäkningar att masscentrum för det begränsade område som avgränsas av $f(x) = 2 - (x-1)^2$ och $g(x) = (x-1)^2$, ligger i punkten $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$. Densiteten ges av $\delta(x) = (x-1)^2$ Området beskrivs i figur 1

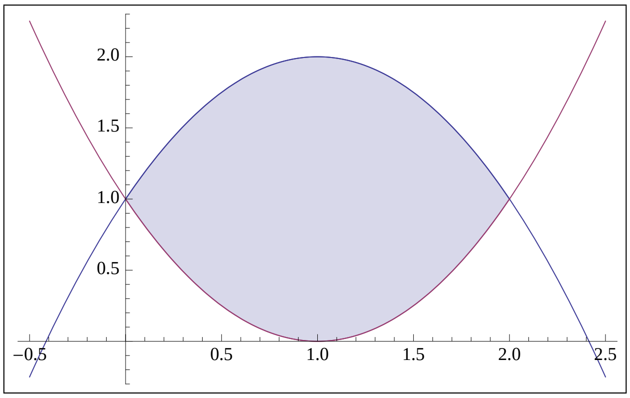

Figure 1: *Figur till uppgift 1, även här ska vi uppenbarligen integrera från 0 till 2! Notera att området är symmetriskt både kring linjen $y = 1$ och kring linjen $x = 1$.*

Svar till tentamen i Envariabelanalys, ——————————.

1. Falskt

2. Sant

3. Falskt

4. Falskt

5. falskt

6. Sant

7. $-\frac{3}{5}$

8. $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(\ln x+2)+1}{2x}$

9. $I_1 = C - \frac{1}{2}\cos x^2$

10. $I = \frac{5}{32}e^4 - \frac{1}{32}$

11. $I = x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$

12. f har lokalt maximum i $x = -2$ och lokalt minimum i $x = 2$. Lodrät asymptot i $x = 0$ och sned asymptot $y = \frac{x}{2} + 1$. I övrigt se lösningen och bilden där.

13. (a) $p_2(x) = 9 + \frac{1}{18}(x-81) - \frac{1}{5832}(x-81)^2$.

    (b) Feltermen blir $E_3 = \frac{1}{16s^2\sqrt{s}}(x-81)^3$

    (c) $|E_3| < \frac{1}{524288}$

14. Massan och Momentena blir allihop $\frac{8}{15}$.

Lösningar till tentamen i Envariabelanalys, ——————————.

1. Täljaren är fel. Rätt täljare är $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$

2.

3. Man får funktionen plus en integrationskonstant.

4. Om man vänder på integrationsgränserna så hoppar det fram ett minustecken:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

5. Om funktionen har ett gränsvärde så måste både funktionens höger och vänstergränsvärde bli detta värde.

6.

7. Det finns åtminstone två lösningsvarianter.

Den första innebär att man bryter ut snabbast växande termen ur täljare och nämnare:

$$\frac{3x^3 - 5x^2 + 7}{8 + 2x - 5x^3} = \frac{x^3(3 - 5x^{-1} + 7x^{-3})}{x^3(8x^{-3} + 2x^{-2} - 5)} = \frac{3 - 5x^{-1} + 7x^{-3}}{8x^{-3} + 2x^{-2} - 5} \quad \to -\frac{3}{5}, \quad x \to \infty,$$

alla x^{-a}, $a = 1, 2, 3$ går mot noll då $x \to \infty$.
Den andra varianten är att använd l'Hôpitals regler, vilket är möjligt eftersom både täljare och nämnare går mot ∞. Vi får en hel kedja med användninga av dessa regler::

$$\frac{f}{g} = \frac{3x^3 - 5x^2 + 7}{8 + 2x - 5x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{f'}{g'} = \frac{9x^2 - 10x}{2 - 15x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \Rightarrow$$
$$\frac{f''}{g''} = \frac{18x - 10}{-30x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{f'''}{g'''} = \frac{18}{-30} = -\frac{3}{5}$$

8. Vi använder en räkneregel för logaritmen för att skriva om vår funktion ::

$$f(x) = \sqrt{x}\ln x + \frac{1}{2}\ln x, \qquad \text{vi har använt:} \qquad \ln\sqrt{x} = \ln x^{1/2} = \frac{1}{2}\ln x$$

Denna omskrivning gör att vi inte behöver använda kedjeregeln för att derivera den andra termen. Men om man inte kommer på att göra omskrivningen så är ändå inte kedjerelen så svår att använda... Vi använder additions och produktreglerna (och kedjereglerna om man inte gör ovanstående omskrivning) och vi får:

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\frac{1}{x}}_{\text{från produktregeln}} + \underbrace{\frac{1}{2x}}_{\text{kedjeregeln ger}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}(2 + \ln x) + 1}{2x},$$

i den andra likheten har vi utnyttjat att $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$ att satt på gemensamt bråkstreck.

9. Här noterar vi att x väsentligen är derivatan av det som står inne i sinusfunktionen. Detta gör att vi bör använda oss av en substitution:

$$u = x^2, du = 2xdx \Rightarrow u = x^2, xdx = \frac{1}{2}du$$

Vi får:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \sin u du = -\frac{1}{2}\cos u + C = C - \frac{1}{2}\cos x^2$$

10. Detta är väl en typisk partiell integrationsuppgift där vi börjar med att integrera x^3 och derivera $(\ln x)^2$:

$$I = \left[\frac{x^4}{4}(\ln x)^2\right]_1^e - \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^e x^3 \ln x dx}_{I_2} = \frac{e^4}{4} - I_2.$$

Nu måste vi partialintegrera I_2:

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{x^4}{4}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e x^3 dx\right) = \frac{e^4}{8} - \left[\frac{x^4}{32}\right]_1^e = \frac{e^4}{8} - \frac{e^4}{32} + \frac{1}{32}.$$

Nu sammanställer vi allting och får att vår integral blir

$$I = \frac{e^4}{4} - I_2 = \frac{e^4}{4} - (\frac{e^4}{8} - \frac{e^4}{32} + \frac{1}{32}) = \frac{5}{32}e^4 - \frac{1}{32}$$

11. Eftersom polynomen i täljare och nämnare har samma gradtal så behöver vi börja med en polynomdivision som i detta fall blir en enkel omskrivning

$$\frac{x^3+2}{x^3-x} = \frac{x^3-x+x+2}{x^3-x} = \frac{x^3-x}{x^3-x} + \frac{x+2}{x^3-x} = 1 + \frac{x+2}{x^3-x}$$

Integralen blir nu

$$I = \int 1 \cdot dx + \underbrace{\int \frac{x+2}{x^3-x}dx}_{I_1} = x + I_1$$

där integralen I_1 måste integreras med partialbråksuppdelning:

$$I_1 = \int \frac{x+2}{x(x^2-1}dx = \int \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}dx$$

Partialbråksuppdelningen blir

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$A = -2$ $B = \frac{3}{2}$ och $C = 1/2$ kan beräknas med handpåläggning och då får vi

$$I_1 = -2\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{dx}{x+1} = -2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C,$$

och följdaktligen blir vår integral

$$I = x + I_1 = x + -2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

12. Vi kan börja med att skriva om funktionen som

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{2}{x} \tag{2}$$

och då blir det enklare att derivera funktionen:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

Nu försöker vi skaffa information om funktionen:

Från f: Funktionen är definierad överallt utom i $x = 0$. Funktionen har inga nollställen eftersom täljaren $x^2 + 2x + 4 = (x+2)^2$ ständigt är positiv. Täljaren är noll i $x = 0$ vilket ger att funktionen har en lodrät asymptot där. Inga uppenbara symmetrier kan ses.

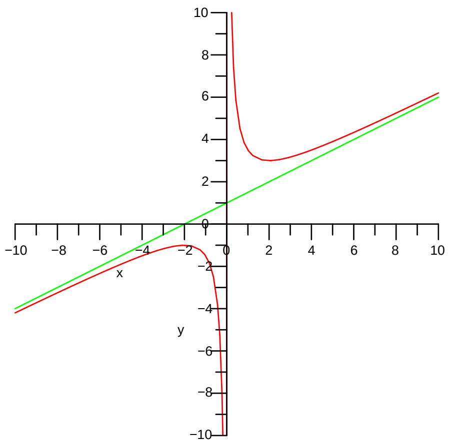

Figure 2: Bild till uppgift 6: Grafen till $f(x)$ tillsammans med den räta linjen som är den sneda asymptoten $y = \frac{x}{2} + 1$

Från f': Kritiska punkter finns i nollställena till derivatans täljare, dvs då $x = \pm 2$. Derivatan är inte definierad i $x = 0$. Funktionen är växande $f' > 0$ på intervallen $(-\infty, -2)$ och $(2, \infty)$ och avtagande $(f' < 0)$ på intervallen $(-2, 0)$ och $(0, 2)$

Från f": Andra derivatan är inte noll någonstans. $f''(2) > 0$ och $f''(-2) < 0$ vilket ger att den första kritiska punkten $x = 2$ är ett lokalt minimum och den andra $x = -2$ är ett lokalt maximum. f är konkav nedåt (sur mun, $f'' < 0$) då $x < 0$ och konkav uppåt (glad mun, $f'' > 0$) då $x > 0$.

Aymptoter: Lodrät asymptot i $x = 0$. Eftersom täljarpolynomets gradtal är ett mer än nämnarpolynomets gradtal så har funktionen även en sned asymptot. Vi ser från (2) att vår funktion närmar sig linjen $y = \frac{x}{2} + 1$ då $x \to \pm\infty$.

13. Vi har att taylorutveckling med centrum i a, till andra graden kan skrivas

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + E_3, \quad \text{där}$$

$$E_3 = \frac{f'''(s)}{3!}(x-a)^3, \quad \text{där } s \text{ ligger mellan } x \text{ och } a$$

(a) Eftersom $a = 81$ så får vi att $f(a) = \sqrt{81} = 9$. Vi har att $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$ och $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$. Vi får då att andra gradens taylorpolynom blir

$$p_2(x) = 9 + \frac{1}{18}(x-81) - \frac{1}{2 \cdot 2916}(x-81)^2.$$

Detta polynom ger värdet

$$p_2(80) = 9 - \frac{1}{18} - \frac{1}{5832} = \frac{52163}{5832}$$

som är en approximation av $\sqrt{80}$.

(b) Feltermen blir

$$\frac{3}{8 \cdot 3!}s^{-5/2}(x-81)^3 = \frac{3}{48s^2\sqrt{s}}(x-81)^3$$

(c) För feluppskattningen noterar vi att $1/s^2\sqrt{s}$ är avtagande vilket ger att vi måste hitta en uppskattning av felet till vänster om 80 och här är 64 bäst eftersom det talet har en bra rot. Vi får

$$|E_3| < |\frac{3}{48 \cdot 64^2 \cdot \sqrt{64}}\ (-1)^3| = \frac{3}{1572864} = \frac{1}{524286} \approx 1{,}907349 \cdot 10^{-6} \ldots$$

14. Vi börjar med att beräkna massan:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^2 (f(x) - g(x))\delta(x)dx \\ &= \int_0^2 [2 - 2(x-1)^2](x-1)^2dx = 2\int_0^2 [(x-1)^2 - (x-1)^4]dx = \\ &= [\text{subst: t=x-1, dt=dx}] = \\ &= 2\int_{-1}^1 t^2 - t^4dt = 2\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_{-1}^1 = 2\underbrace{\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right]}_{\frac{2}{15}} - 2\underbrace{\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right]}_{-\frac{2}{15}} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Momentet med avseende på $x = 0$:

$$\begin{aligned} M_{x=0} &= \int_0^2 x[2 - 2(x-1)^2](x-1)^2dx = \\ &= [\text{subst: t=x-1, x=t+1,dt=dx}] = \\ &= 2\int_{-1}^1 (t+1)[t^2 - t^4]dt = 2\int_{-1}^1 t^3 - t^5 + t^2 - t^4dt = \\ &= 2\left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_{-1}^1 = \\ &= 2\underbrace{\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right]}_{\frac{13}{60}} - 2\underbrace{\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right]}_{\frac{-3}{60}} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{y=0} &= \frac{1}{2}\int_0^2 ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\delta(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 ([2 - (x-1)^2]^2 - [(x-1)^2]^2)(x-1)^2dx \\ &= [\text{subst: t=x-1, x=t+1,dt=dx}] = \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 ([2 - t^2]^2 - [t^2]^2)t^2dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 [4t^2 - 4t^4]dt = 2\int_{-1}^1 [t^2 - t^4]dt \\ &= 2\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_{-1}^1 = [\text{se även ber. av massan}] = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Eftersom masscentrumkoordinaterna fås genom att dividera momenten med massan så följer det nu direkt att $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$.