HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
ovnTenta 2

ENVARIABELANALYS
ma034a

Skrivtid: :: . Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa på de uppgifter som kräver lösning.

Frågorna 1 till 6 ska svaras med sant eller falskt och ger vardera 1 poäng.

1. Om en kontinuerlig funktion antar värdena y=1 samt y=3 så vet man att den någonstans antar värdet y=2
2. $$(f(x)g(x))' = g'(x)f(x) + f'(x)g(x)$$
3. Om en funktion har en invers så är funktionen antingen växande eller avtagande.
4. En funktion som är växande eller avtagande på ett intervall har en invers.
5. För integralen
$$\int \frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)} dx$$
så är det lämpligt att göra ansatsen
$$\frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$
vid partialbråksuppdelning.
6. Om funktionen $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ växer om $x < a$ och avtar om $x > a$ så har f ett globalt maximum i $x = a$.

Frågorna 7-9 ger 3 poäng vardera. Fullständiga lösningar krävs

7. Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$
8. Beräkna derivatan till funktionen
$$f(x) = \arcsin(\sin x)$$
9. Beräkna integralen
$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$$

Uppgifterna 10 -14 kräver fullständiga och väl motiverade lösningar. Uppgifterna ger 5 poäng vardera

10. Beräkna inegralen

$$I_2 = \int x^2 \ln x dx$$

11. Beräkna integralen

$$I_3 = \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2-2x+2)} dx$$

12. Rita grafen till följande funktion

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

Bestäm och klassificera kritiska punkter. Beräkna alla asymptoter.

13. Beräkna volymen av den kropp som uppstår om vi roterar $y = 3x^2 - x^3$, där $0 < x < 3$,

   (a) runt x-axeln. (2p)

   (b) runt y-axeln. (2p)

   (c) Rita en bild av situationen. (1p)

14. (a) Beräkna tredje ordningens Taylorpolynom för $\sin x$ centrerad i origo.

   (b) Använd approximationen från uppgift a) för att beräkna ett närmevärde för $\sin \pi/2$. Vad är det exakta värdet?

   (c) Beräkna felettermen och gör en uppskattning av hur stort felet är.

Svar till tentamen i Envariabelanalys, ——————————.

1. Sant
2. Sant
3. Falskt
4. Sant
5. Falskt
6. Sant
7. $\frac{1}{2}$
8. $$\frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$$
9. $$\arctan(x+3)+C$$
10. $I_2 = 1/3\,x^3 \ln(x) - 1/9\,x^3 + C$
11. $I_3 = 2\ln|x-1| - \ln|x^2-2x+2| + \arctan(x-1) + C$
12. Svaret är lösningen.
13. (a) $729\pi/35$

    (b) $243\pi/10$
14. (a) $p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$

    (b) $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{48} \approx 0.9248.$
    Det exakta värdet: $\sin\pi/2 = 1$

    (c) Feltermen:: $E_3(\pi/2) = \frac{\sin c}{24}\frac{\pi^4}{2^4}$
    Maximala felet:: $\frac{\pi^4}{384} \approx 0.2537$

Lösningar till tentamen i Envariabelanalys, ————————————.

1. Detta följer av den så kallade satsen om mellanliggande värden.

2. Notera att

$$(f(x)g(x))' = g'(x)f(x) + f'(x)g(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

3. För att prata om växande och avtagande så behöver funktionen ha extra egenskaper som att vara definierad på ett intervall, vara deriverbar och liknande. Här har vi bara påståendet att vi har en funktion med invers och inget mer. Detta innebär att följande exempel är tillåtet:

En funktion har invers om den är bijektiv. Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \text{Grön} & \text{om } x = 1 \\ \text{Röd} & \text{om } x = 2 \end{cases}$$

är en inverterar funktion från $\{1, 2\}$ till $\{$ Grön , Röd $\}$. Men det är inte ens meningsfullt att prata om växande och avtagande för sådana mängder.

4. Om $f(x)$ är växande:
Antag att $x \neq y$ är godtyckliga tal i intervallet, t.ex. kan vi anta att $x < y$. Eftersom f är växande så gäller att $f(x) < f(y)$, dvs $f(x) \neq f(y)$. Detta visar att funktionen är injektiv på intervallet vilket ger att funktionen har invers.
Motsvarande resonemang gäller om f är avtagande.

5. Rätt ansats är

$$\frac{x+3}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1}\frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

6. Funktionen växer upp emot $x = a$ och värdet ökar alltså tills vi kommer fram till $x = a$. I denna punkt antas något värde som alltså är det största hittills. När vi sedan fortsätter att öka x så börjar funktionen avta, dvs minska och bli mindre och mindre då x ökar. Vårt värde då $x = a$ måste alltså vara större än alla andra värden och detta betyder att funktionen har ett globalt max i $x = a$.

7. Idén är att använda l'Hôpitals regler ::

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \quad \Rightarrow \quad \text{derivera täljare och nämnare} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1} = \frac{1}{2}$$

l'Hôpitals regler ger alltså att vårt gränsvärde är 1/2.

Ett alternativ är att MacLaurinutveckla täljaren:

$$\sqrt{x+1} - 1 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3) - 1 = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3)$$

Detta ger nu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} - \frac{x}{8} + O(x^2) = \frac{1}{2}$$

8. Den yttre funktionen är $\arcsin x$ vars derivata är $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, kom ihåg att man i denna derivata ska ersätta x med $\sin x$. Den inre funktionens derivata är $\cos x$. Vi får alltså

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} \cdot \cos(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$$

Alternativa lösningar::

Den observante kan notera att $\arcsin x$ är inversen till $\sin x$ och är där denna sammansättning är definierad så gäller $\arcsin(\sin x) = x$. När vi deriverar denna så får vi naturligtvis 1.

Borde inte detta synas i ovanstående derivering?

Svaret är naturligtvis ja. Notera att uttrycket som är under rottecknet är lika med $\cos^2 x$ och eftersom $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$så blir vår derivata

$$\frac{\cos x}{|\cos x|} = \begin{cases} 1 & \text{om },\cos x > 0 \\ -1 & \text{om}, \cos x < 0 \end{cases}$$

I intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ så är $\sin x$ och $\arcsin x$ inverser och $\arcsin(\sin x) = x$ På detta intervall

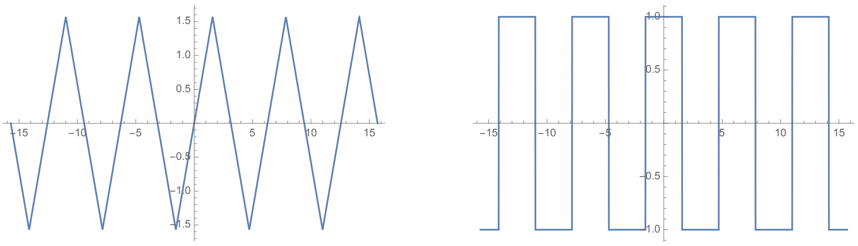


Figure 1: Vår funktion och dess derivata på reella axeln.

är $\cos x$ positiv och detta ger att derivatan blir 1. I den vänstra plotten i figur 1 så visar vi hur $\arcsin(\sin x)$ ser ut på reella axeln. Iden högra plotten visar vi hur derivatan ser ut. Notera att i det intervall där inversen är definierad så är derivatan 1.

9. En kontroll av nämnarpolynomets nollställen så ser man att polynomet bara har ickereella nollställen och inte kan faktoriseras ytterligare. Vi kvadratkompletterar polynomet:

$$x^2 + 6x + 10 = x^2 + 2 \cdot 3x + 9 + 1 = (x+3)^2 + 1.$$

Detta gör att vi genom en enkel substitution kan omforma integralen till en arctan integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+6x+10} &= \int \frac{dx}{(x+3)^2+1} = \\ &= [\text{ Subst :: } u = x+3, \quad du = dx] = \\ &= \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + K = \arctan(x+3) + K \end{aligned}$$

10. I denna uppgift använder vi partiell integration. Eftersom logaritmen har en knepig primitiv funktion så väljer vi att integrera x^2 och derivera logaritmen:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} \\ &= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C = \frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

11. Vi börjar med partialbråksuppdelning och noterar att andragradsfaktorn till nämnaren har ickereella nollställen varför vi partialbråksuppdelar med följande ansats:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$$

Handpåläggning ger att $A = 2$ vilket ger att ovanstående partialbråksuppdelning ger följande likhet för täljarna (vilket fås när vi sätter höger led på gemensamt bråkstreck:)

$$x+1 = 2(x^2-2x+2) + (Bx+C)(x-1) = (B+2)x^2 + (-B+C-4)x - C + 4$$

som ger oss att $B = -2$ (från x^2 koeffecienterna)) $C = 3$ från konstanttermen. Från x-koeffecienten får vi likheten $C - B - 4 = 1$ som uppfylls för de värden vi nyss fick $B = -2$ och $C = 3$.

Vår partialbråksuppdelning ger nu följande integraler

$$\begin{aligned} I_3 &= \underbrace{\int \frac{2dx}{x-1}}_{I_{31}} + \int \frac{-2x}{x^2-2x+2}dx + \int \frac{3dx}{x^2-2x+2} = \\ &= I_{31} + \int \frac{-2x+2-2}{x^2-2x+2}dx + \int \frac{3dx}{x^2-2x+2} = \\ &= I_{31} + \underbrace{\int \frac{-2x+2}{x^2-2x+2}dx}_{I_{32}} + \underbrace{\int \frac{dx}{x^2-2x+2}}_{I_{33}} \end{aligned}$$

Förlängningen i den andra integralen görs för att vi ska få en integrand vars täljare precis är derivatan av av nämnaren. Detta gör att integralen av I_{32} i nästa steg blir enklare. I annat fall så skulle vi tvingas dela upp integralen i två delar varav den andra delen blir av typen I_{33}. Denna extra integral är med denna metod inbakad i I_{33}, vilket minskar antalet beräkningssteg.

Vi löser nu våra tre integraler

$$I_{31} = \int \frac{2dx}{x-1} = 2\ln|x-1|$$

$$\begin{aligned} I_{32} &= \int \frac{-2x+2}{x^2-2x+2}dx = \\ &[\text{ subst :: } u = x^2-2x+2,\ du = 2x-2] \\ &= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| = -\ln|x^2-2x+2| \end{aligned}$$

$$I_{33} = \int \frac{dx}{x^2-2x+2} = [\text{ kvadratkomplettering }] = \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \arctan(x-1)$$

Vår integral I_3 blir slutligen

$$I_3 = 2\ln|x-1| - \ln|x^2-2x+2| + \arctan(x-1) + C$$

12. Derivatan blir

$$g'(x) = \frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

från vilket vi hittar kritiska punkterna 0 och $\pm\sqrt{3}$ ::

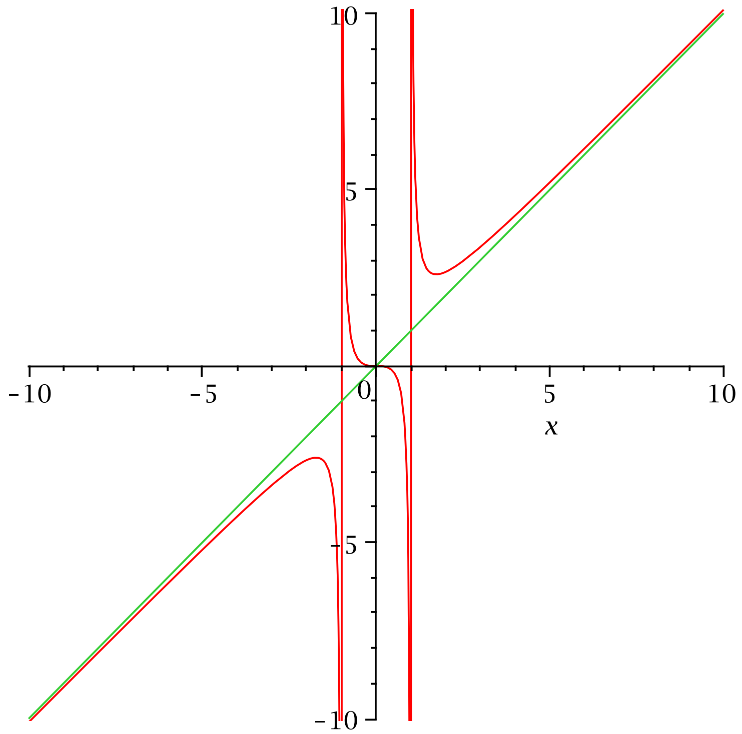
maximum :: $x = -\sqrt{3}$ (eftersom f växer till vänster och avtar till höger).

minimum :: $x = \sqrt{3}$(eftersom f avtar till vänster och växer till höger)

terrasspunkt :: $x = 0$ Från faktoriseringen (och från teckenstudiet) av derivatan ser vi att derivatan är negativ mellan $-\sqrt{3}$ och $\sqrt{3}$. Detta innebär att den kritiska punkten i origo är en terrasspunkt. (eftersom den avtar både till vänster och till höger.)

x		$-\sqrt{3}$		-1	0	1		$\sqrt{3}$	
x^2	+	+	+	+	0	+	+	+	+
$x-\sqrt{3}$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$x+\sqrt{3}$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$(x-1)^2$	+	+	+	+	+	0	+	+	+
$(x+1)^2$	+	+	+	0	+	+	+	+	+
f'	+	0	-	ej def	-	ej def	-	0	+

Table 1: Teckenstudium för uppgift 12.



Asymptoter: vertikala i ± 1 och sned asymptot $y = x$ eftersom

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$$

13. (a) Vi integrerar med skivmetoden, dvs vi integrerar infinitesimala skivor med volymen

$$dV = \pi r^2 dx = \pi(f(x))^2 dx = \pi(3x^2 - x^3)^2 dx = \pi(9x^4 - 6x^5 + x^6)dx$$

Vi får således att rotationsvolymen ges av integralen

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^3 9x^4 - 6x^5 + x^6 dx = \pi \left[\frac{9}{5}x^5 - x^6 + \frac{x^7}{7} \right]_0^3 \\
&= \pi \left[\frac{9}{5}3^5 - 3^6 + \frac{3^7}{7} \right] = \pi 3^6 \left[\frac{3 \cdot 7}{35} - \frac{35}{35} + \frac{3 \cdot 5}{35} \right] \\
&= \frac{3^6\ \pi}{35} = \frac{729\ \pi}{35}
\end{aligned}
$$

(b) I denna uppgift så ska vi rotera kring y-axeln och vi använder då metoden med cylindriska skal. Detta innebär att vi integrerar infinitesimala cylinderskal med volymen

$$dV = 2\pi x f(x) dx = 2\pi x(3x^2 - x^3)dx = 2\pi(3x^3 - x^4)dx,$$

vilket ger att volymen ges av integralen och blir

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^3 (3x^3 - x^4)dx = 2\pi \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^3 = 2\pi \left[\frac{3 \cdot 3^4}{4} - \frac{3^5}{5} \right] \\
&= 2\pi\ 3^5 \left[\frac{5}{20} - \frac{4}{20} \right] = \frac{243\ \pi}{10}
\end{aligned}
$$

(c) Här är en bild på situationen:

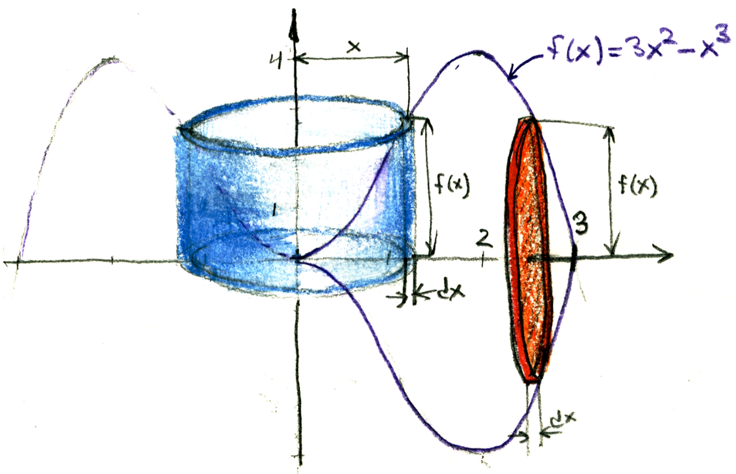


Figure 2: Röd skiva är infinitesimal volym i uppgift (a.) och blå cylinder är infinitesimal volym för uppgift (b.)

14. (a) M.h.a Taylors sats så ges tredje ordningens Taylorpolynom av

$$p_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

som i vårt fall, då $a = 0$ och $f(x) = \sin x$, så får vi

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6},$$

vilket följer eftersom $\sin 0 = 0$.

(b) Ett närmevärde till $\sin \pi/2$ får vi om vi sätter $x = \pi/2$ i $p_3(x)$, som då blir

$$p_3(\pi/2) = \pi/2 - \frac{(\pi/2)^3}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{48} \approx 0.9248$$

(c) Vi vet ju att $\sin \pi/2 = 1$ och då kan man ju uttrycka felet som felet = det rätta minus det approximativa

$$\text{felet } = 1 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{48} \approx 0.07512$$

Feltermen för approximationen blir enligt Taylors sats:

$$E_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4,$$

där c ligger mellan $x = \pi/2$ och 0. Eftersom fjärdederivatan av $\sin x$ är $\sin x$ så har vi

$$|E_3(\pi/2)| = \left|\frac{\sin c}{24}\frac{\pi^4}{2^4}\right| = \left|\frac{\pi^4}{384}\sin c\right| \leq \frac{\pi^4}{384} \approx 0.2537$$

där den sista olikhet följer eftersom $|\sin c| \leq 1$. Denna feluppskattning betyder att om vi uttår enbart från approximationen så är det inte möjligt att säga mer om det korrekta värdet för $\sin \pi/2$ än att det ligger i intervallet $[0.9248 - 0.2537, 0.9248 + 0.2537] = [0.6711, 1.1785]$ vilket ju stämmer eftersom det rätta värdet är 1.

Denna approximation är inte så bra och anledningen är vi använt Taylorpolynomet med centrum i origo och origo ligger för långt ifrån $\pi/2$ för att vi ska kunna få ett bra närmevärde.

Graferna till $\sin x$ och $p_3(x)$ är plottade tillsammans i figur 3.

Figure 3: Jämförelse mellan $\sin x$ (blått) och dess tredjegradens Taylorpolynom (rött). Notera att i vår punkt $\pi/2$ så ligger kurvorna en bit från varandra. Det är detta som är felet.