HÖGSKOLAN I GÄVLE

Matematik med datalogi, mfl.

**ATM-Matematik**
Mikael Forsberg
026-64 89 61

*Skrivtid: . Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.*
*Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.*

## Frågorna 1 till 6 ska svaras med sant eller falskt och ger vardera 1 poäng.

1. Låt $f$ vara en minst två gånger kontinuerligt deriverbar med kritisk punkt i $x = 0$. Då gäller att om andra derivatan är noll i den kritiska punkten så måste funktionen ha terrasspunkt i $x = 0$.

2. Om en funktion är kontinuerlig i en punkt $x = a$ så gäller
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

3. När man ska beräkna ett gränsvärde
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$
så säger l'hôpitals regler att
$$L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4. Masscentrum och tyngdpunkt är alltid samma sak.

5. När man approximerar en funktion $f(x)$ med ett Taylorpolynom av grad 2, med centrum i $x = a$, så ges felet av
$$\frac{f'''(s)}{3!}(x-a)^3,$$
där $s$ är ett **godtyckligt** tal mellan $x$ och $a$.

6. Centroiden för en kropp är en egenskap som beror av kroppens densitetsfunktion.

## Frågorna 7-9 ger 3 poäng vardera

7. Beräkna följande gränsvärde

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$$

8. Derivera funktionen

$$f(x) = \arctan\left[\sin(5x^3)\right]$$

9. Beräkna integralen

$$\int x^3 \ln x dx$$

## Uppgifterna 10 -14 kräver fullständiga och väl motiverade lösningar. Uppgifterna ger 5 poäng vardera

10. Beräkna integralen

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x + 5)(x^2 + 4)} dx$$

11. Rita grafen till

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x}$$

Beräkna och klassificera alla kritiska punkter, inflexionspunkter och asymptoter.

12. Låt $f(x) = -x^2 + 6x - 6$
    (a) Beräkna arean $\mathcal{A}$ som ligger under grafen till $f(x)$ och ovanför linjen $y = -1$. (2 p)
    (b) Beräkna volymen som uppstår då vi roterar arean $\mathcal{A}$ runt $y$-axeln. (3 p)

13. Att $e$ är ett tal mellan 2 och 3 är ett faktum som många känner till. Beräkna fjärde ordningens MacLaurinpolynom till funktionen $f(x) = e^x$ och använd detta för att ge ett närmevärde till $e$. Ange feltermen och uppskatta felet.

14. $x$-axeln, $y$-axeln och linjesegmentet mellan punkterna $(0, a)$ och $(b, 0)$ $(a > 0,\ b > 0)$ bildar en triangel i första kvadranten. Densiteten för denna triangel är konstant lika med ett.
    (a) Rita en bild över situationen (1p)
    (b) Beräkna area och momenten map vardera axel (3p)
    (c) Bestäm masscentrum för denna triangel. (1p)

**Svar till tentamen i , .**

1. Falskt

2. Sant

3. falskt

4. Falskt

5. Falskt

6. Falskt

7.

8.

9.

10.

$$\frac{1}{58}\left(3\ln\left(x^2+4\right)+52\ln(x+5)-15\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

11.

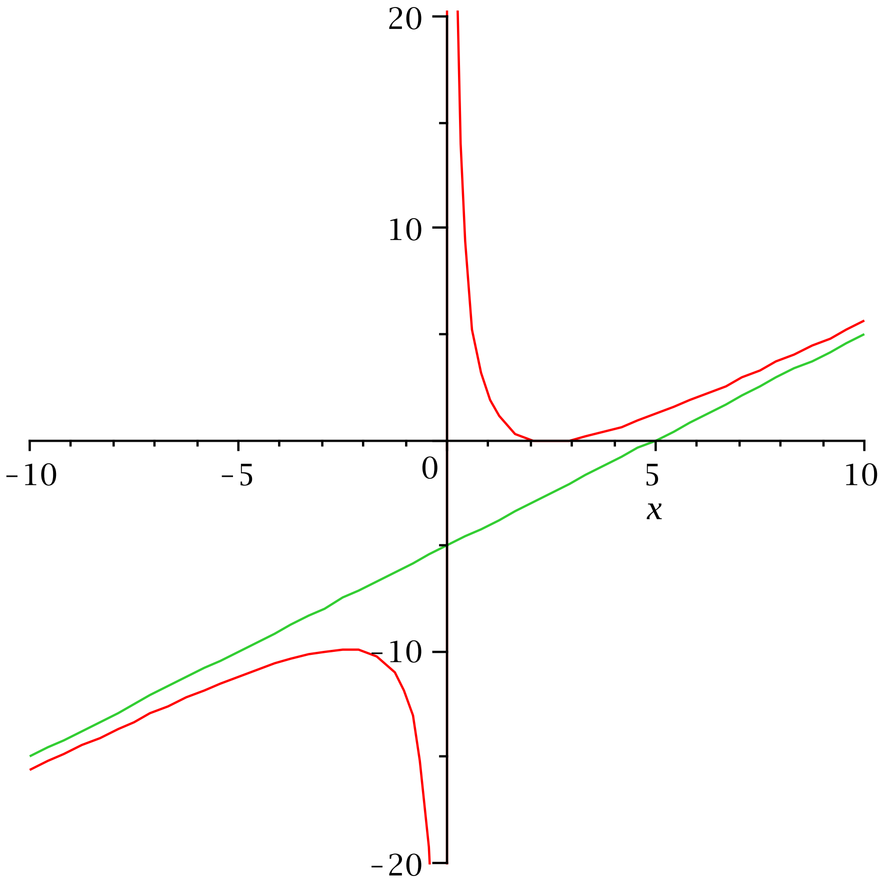


Figure 1: Graf till uppgift 2

12. (a) $\mathcal{A} = 32/3$

(b) Volymen blir $64\pi$

13.

$$e = 65/24 \pm 1/40 = 2.7083333 \pm 0.025$$

14. (a) Se lösningen

(b) $A = ab/2$, $M_{x=0} = ab^2/6$ och $M_{y=0} = a^2b/6$

(c) $\bar{x} = b/3$ $\bar{y} = a/3$

**Lösningar till tentamen i , .**

**1.** Då andra derivatan är noll i en kritisk punkt har vi situationen ”mr Poker” och man kan då inte dra någon slutsats om den kritiska punkten. Det kan vara ett minimum (som exempelvis $x^4$) eller ett maximum (som i fallet $-x^4$) eller en terasspunkt (som i exemplet $x^3$).

**2.** Det här är exakt definitionen av att en funktion är kontinuerlig i punkten $x = a$

**3.** När man ska beräkna ett gränsvärde som är av typen $[\frac{0}{0}]$ eller av typen $[\frac{\infty}{\infty}]$ så gäller att gränsvärdet är lika med gränsvärdet av kvoten av derivatorna. Formuleringen i uppgiften öppnar upp för alla andra situationer där detta inte gäller. Därför är **falskt** det enda rätta svaret här.

**4.** Man skulle kunna säga att de aldrig är samma sak eftersom de är definierade på olika sätt.

Om gravitationsfältet inte varierar över den aktuella kroppen så är masscentrum lika med tyngdpunkten. Detta är approximativt sant endast för små kroppar nära jordytan. För en skyskrapa kan de två punkterna ligga någon millemeter från varandra. Så det är inte någon stor skillnad.

**5.** Talet $s$ är inte godtyckligt utan väldigt speciellt. Taylors sats säger att det existerar ett sådant tal men talar inte om för oss hur man hittar det. Hade det varit godtyckligt hade vi kunna låta $s$ vara vilket tal som helst mellan $x$ och $a$.

**6.** Centroiden för en kropp är en geometrisk egenskap som bara beror på kroppens form och inte på hur densiteten dvs hur materialets täthet varierar.

**7.** Både täljare och nämnare går mot noll. Eftersom dessa är polynom så förstår vi att vi kan faktorisera:

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to-2}\frac{(x-1)}{(x-2)}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

Formen $[\frac{0}{0}]$ möjliggör också att man använder l'Hôpitals regler:

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to-2}\frac{2x+1}{2x}=\frac{3}{4}$$

**8.** Kedjeregeln ger

$$f'(x)=\frac{1}{1+[\sin(5x^3)]^2}\cdot[\cos(5x^3)]\cdot(15x^2)=\frac{15x^2\cos(5x^3)}{1+[\sin(5x^3)]^2}$$

**9.** Partiell integration ger

$$\int x^3\ln x dx=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\int\frac{x^4}{x}dx=\frac{x^4\ln x}{4}-\frac{1}{16}x^4+K$$

**10.** Vi börjar med att notera att nämnaren inte kan faktoriseras ytterligare i reella faktorer och då får vi följande ansats för partialbråksuppdelning:

$$\frac{x^2+1}{(x+5)(x^2+4)} = \frac{A}{x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Handpåläggning ger att $A = \frac{26}{29}$.

Om vi låter $x = 0$ respektive $x = 1$ så får vi två ekvationer som vi kan använda för att beräkna $B$ och $C$:

$$x = 0 :: \qquad \frac{1}{20} = \frac{26}{5 \cdot 29} + \frac{C}{4} \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{15}{29}$$

$$x = 1 :: \qquad \frac{1}{15} = \frac{26}{6 \cdot 29} + \frac{B+C}{5} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{3}{29}$$

Vår integral blir nu

$$\int \frac{x^2+1}{(x+5)(x^2+4)}dx = \frac{26}{29}\underbrace{\int \frac{dx}{x+5}}_{=I_1} + \frac{3}{29}\underbrace{\int \frac{x-5}{x^2+4}dx}_{=I_2}$$

Vi beräknar delintegralerna för sig:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x+5} = \ln|x+5|$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{x-5}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int \left[\frac{2x-10}{x^2+4}\right] dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx - \frac{1}{2}\int \frac{10}{x^2+4}dx = \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - 5\int \frac{1}{4(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2)}dx = \\
&= [\text{Subst::} \quad u = x/2, du = dx/2] = \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{5}{2}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{5}{2}\arctan u = \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{5}{2}\arctan\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

Vår integral blir slutligen

$$\int \frac{x^2+1}{(x+5)(x^2+4)}dx = \frac{26}{29}I_1 + \frac{3}{29}I_2 = \frac{1}{58}\left[52\ln|x+5| + 3\ln(x^2+4) - 15\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right] + K$$

**11. Vi börjar med att beräkna vår rationella funktions nollställen** som är täljarpolynomets nollställen: Termen 6 är produkten av polynomets nollställen, vilket ger att om vi antar att nollställena är heltal så måste vi leta nollställena bland faktorerna till 6 som är $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Sätter vi in dessa tal i polynomet så ser vi att $2, 3$ är våra nollställen! (alternativt löser vi enkelt $x^2 - 5x + 6 = 0$).

Genom att utföra divisionen så får vi

$$f(x) = x - 5 + \frac{6}{x}$$

Detta ger oss att $y = x-5$ är en **sned asymptot** Vi ser även att y-axeln är en **lodrät asymptot** (vilket följer av att funktionen inte är definierad i origo.)

**Vi deriverar:** Förstaderivatan:

$$f'(x) = 1 - \frac{6}{x^2} = \frac{x^2-6}{x^2}$$

Andraderivatan

$$f''(x) = \frac{12}{x^3}$$

**Kritiska punkter:** Derivatan blir noll då $x = \pm\sqrt{6} \approx 2.45$, vilket således är våra kritiska punkter.
**Vi klassificerar de kritiska punkterna med andraderivatatestet:** I den negativa kritiska punkten $x = -\sqrt{6}$ så är andraderivan negativ (sur mun $\Rightarrow$ max) och i den positiva kritiska punkten $x = \sqrt{6}$ så är andraderivatan positiv (glad mun $\Rightarrow$ min)
**Nollställen till andraderivatan:** inga nollställen:
**växande/avtagande:** Funktionen växer/avtar om derivatan är positiv/negativ:

derivatan är mindre än noll för de $x$ som gör att $x^2 < 6$ vilket betyder att $-\sqrt{6} < x < \sqrt{6}$. För dessa $x$ är vår funktion alltså avtagande. För övriga $x$ så är vår funktion växande.

Sammanställer man allt detta så kan man rita upp en graf liknande den i figur 1.

**12.** (a) Arean som vi söker ligger ovanför $y = -1$ och nedanför $f(x) = -x^2 + 6x - 6$. Vi behöver veta var dessa två kurvor skär varandra och löser därför ekvationenen $f(x) = -1$ som ger oss andragradsekvationen $-x^2 + 6x - 5 = 0$ och vi får att skärningspunkterna är $x = 1$ och $x = 5$

Arean blir nu

$$A = \int_1^5 f(x) - (-1)dx = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)dx = [-x^3/3 + 3x^2 - 5x]_1^3 = \cdots = 32/3$$

(b) För rotationen runt $y$-axeln så använder vi oss av cylindriska skal:

$$\text{Cylindriskt skal::} \qquad dV = \underbrace{\text{omkretsen}}_{2\pi x} \cdot \underbrace{\text{höjden}}_{f(x)-(-1)} \cdot \underbrace{\text{tjockleken}}_{dx}$$

Alla cylindriska skal mellan 1 och 5 skall summeras och vi får att rotationsvolymen blir:

$$V = 2\pi \int_1^5 x(-x^2 + 6x - 5)dx = 2\pi[-x^4/4 + 2x^3 - 5x^2/2]_1^5 = \cdots = 64\pi$$

**13.** Fjärde ordningens MacLaurinpolynom blir

$$p_4(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/3! + x^4/4!$$

Eftersom $e = f(1)$ så får vi ett närmevärde genom

$$p_4(1) = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 = 65/24 \approx 2.7083333$$

Feltermen är

$$E_4(x) = \frac{f^{(v)}(s)}{5!}x^5 = \frac{x^5 e^s}{120}, \qquad s \text{ ligger mellan 0 och } x.$$

Då $x = 1$ har vi att $0 \leq s \leq 1$ och vi får

$$E_2(1) = \frac{e^s}{120} < \frac{e}{120} < \frac{3}{120} = \frac{1}{40} = 0.025,$$

där vi i första olikheten använt att $e^s$ är en växande funktion och $0 \leq s \leq 1$, vilket ger att $1 = e^0 < e^1 = e$. I den andra olikheten använder vi faktumet att $e < 3$ som uppgiften inleddes med. Dilket ger att

$$e = 65/24 \pm 1/40 = 2.7083333 \pm 0.025$$

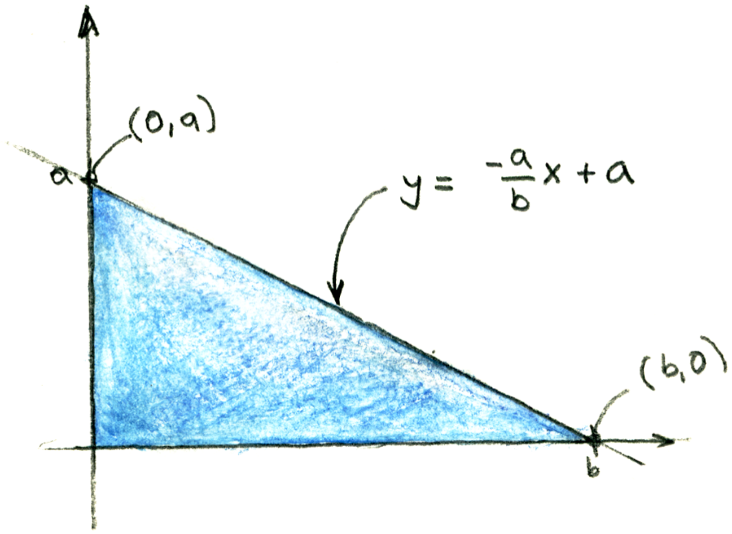


Figure 2: Triangeln i uppgiften är begränsad av linjen $y = -\frac{a}{b}x + a$.

**14.** (a) Vi börjar med att rita en bild på situationen

För att beräkna linjen som definierar triangelns övre begränsningslinje så sätter vi in de två punkterna i linjens ekvation $y = kx + m$ så får vi två ekvationer och löser man dessa så får vi $k = -a/b$ och $m = a$. Därför får vi att linjens ekvation blir

$$y = -\frac{a}{b}x + a$$

Denna funktion kommer vi att använda för att beräkna momenten

(b) **Momentet** $M_{x=0}$ **::** Vi har att momentet kring $y$-axeln $x = 0$ blir

$$\begin{aligned}
M_{x=0} &= \int_0^b xf(x)dx = \int_0^b x(-\frac{a}{b}x + a)dx = \int_0^b (-\frac{a}{b}x^2 + ax)dx = \\
&= \left[-\frac{ax^3}{3b} + \frac{ax^2}{2}\right]_0^b = -\frac{ab^3}{3b} + \frac{ab^2}{2} = ab^2\left[\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\right] = ab^2\left[\frac{-2}{6} + \frac{3}{6}\right] \\
&= \frac{ab^2}{6}
\end{aligned}$$

**Momentet** $M_{y=0}$ **::** Momentet kring $x$-axeln $y = 0$ blir

$$\begin{aligned}
M_{y=0} &= \frac{1}{2}\int_0^b f(x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^b \left[-\frac{a}{b}x + a\right]^2 dx = -\frac{1}{2}\int_0^b \left[\frac{a^2}{b^2}x^2 - 2\frac{a^2}{b}x + a^2\right] dx = \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{a^2x^3}{3b^2} - \frac{a^2x^2}{b} + a^2x\right]_0^b = \frac{1}{2}\left[\frac{a^2b^3}{3b^2} - \frac{a^2b^2}{b} + a^2b\right] = \frac{a^2\ b}{6}
\end{aligned}$$

**Triangelns massa ::** När man har konstant densitet (vår densitet är 1) så bir massan lika med arean. Triangelns area blir basen gånger höjden delat med två, dvs

$$A = ab/2$$

(c) Det är nu enkelt att få fram masscentrums koordinater:

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{A} = \frac{b}{3}$$
$$\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{A} = \frac{a}{3}$$