HÖGSKOLAN I GÄVLE

Matematik

ATM-Matematik
Mikael Forsberg
OvnTenta 4

Skrivtid: . Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

Frågorna 1 till 6 ska svaras med sant eller falskt och ger vardera 1 poäng.

1. Kurvan i figur 1 kan vara grafen till en funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

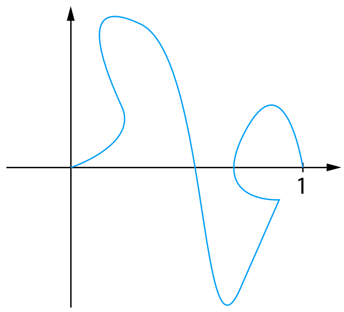

Figure 1: Kurva till uppgift 1

2. Om $f''(a) = 0$ så är a en inflektionspunkt.

3. Funktionen
$$\frac{x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 + 4x + 2}$$
har en sned asymptot då $x \to \infty$.

4. Om den minst 3 gånger kontinuerligt deriverabara funktionen $f(x)$ uppfyller $f''(1) > 0$ så har funktionen ett minimum i $x = 1$.

5. För integraler gäller
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

6. Om vi deriverar funktionen
$$f(x) = \int_1^x [g(t)]^2 dt$$
så får vi en funktion som aldrig blir negativ.

Frågorna 7-9 ger 3 poäng vardera

7. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \sqrt{x}}{\sin x - \sqrt{x}}$$

8. Beräkna derivatan till funktionen

$$f(x) = \frac{x \cdot \arctan x}{1 + x^2}$$

9. Beräkna integralen

$$I_3 = \int \frac{x^2 + 3x + 2}{(x+1)(x-2)(x+3)} dx$$

Uppgifterna 10 -14 kräver fullständiga och väl motiverade lösningar. Uppgifterna ger 5 poäng vardera

10. Beräkna integralen

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$$

11. Beräkna integralen

$$I_2 = \int \frac{x^2 + 3x + 1}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)} dx$$

12. (a) Rita grafen till polynomet $p(x) = x^3 - 7x + 6$
    (b) Bestäm det största intervall kring origo där polynomet har en invers.

13. Beräkna tredje gradens MacLaurinPolynom till funktionen $\arctan x$. Beräkna feltermen och använd polynomet och feltermen för att approximera $\arctan 1$, med feluppskattning.

    Hint och en varning :: En ordentlig utredning varför $s_o = \sqrt{\frac{1}{5}\left(5 - 2\sqrt{5}\right)} \approx 0.32492$ i era räkningar) ger maximalt fel, skulle egentligen vara en egen uppgift värd 5 poäng...
    (Hint :: använd därför gärna $s = \frac{1}{3}$ som ligger någorlunda nära s_o...)

14. Låt Ω vara det område som begränsas uppåt av $\cos x$, nedåt av $\sin x$ och ligger mellan $x = 0$ och $x = \pi/4$. Området har densitetsfunktionen $\delta(x) = 1$.
    (a) Rita området Ω och bestäm dess area.
    (b) Beräkna momenten med avseende på axlarna
    (c) Beräkna centroiden för Ω.

Svar till tentamen i , .

1. Falskt

2. Falskt

3. Sant

4. Falskt

5. Sant.

6. Sant.

7. -1

8. $\frac{x+(1-x^2)\arctan x}{(1+x^2)^2}$

9. $I_3 = \frac{4}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{5}\ln|x+3| + C$

10. $(\ln x)(\ln(\ln x)) - \ln x + K$

11. $I_2 = 5\ln|x-1] - 2\ln((x-1)^2+1) + 5\arctan(x-1) + C$

12. (a) .

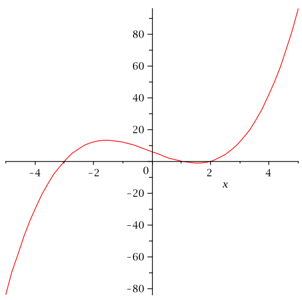

Figure 2: Graf till uppgift 12

(b) Intervallet blir $[\frac{-\sqrt{21}}{3}, \frac{\sqrt{21}}{3}]$

13. $\frac{2}{3} \pm \frac{243}{1250} = 0.6666 \pm 0.1944$

14. Arean :: $\sqrt{2} - 1$.

Centroidens koordinater ::

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{M} = \frac{\sqrt{2}\pi - 4}{4\left(\sqrt{2}-1\right)} \qquad \text{och} \qquad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{M} = \frac{1}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

Lösningar till tentamen i , .

1. För vissa x så har vi flera y-värden givna. Detta betyder att kurvan inte kan vara en funktion eftersom funktionsdefinitionen säger att varje element i definiitonsmängden ska tilldela exakt ett element. (Varje x-värde ska hamna på exakt ett y-värde.)

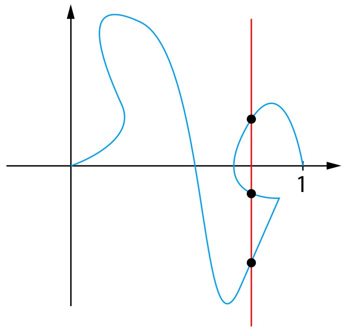

Figure 3: Kurva till uppgift 1:: För det x värde som svarar mot den röda lodräta linjen så får vi tre olika y-värden. Detta är ett brott mot ”första funktionslagen”: varje x ska ge exakt ett y.

2. Inflektion innebär att att andraderivatan byter tecken i en inflektionspunkt, är positiv till vänster och negativ till höger eller tvärt om. Detta innebär att om vi har en inflektionspunkt så måste andraderivatan vara noll i punkten.

Men bara för att andra derivatan är noll så innebär detta inte att vi automatiskt har inflektion, vilket följande exempel visar. Exemplet x^4 med $a = 0$ visar att $f''(0) = 0$ men funktionen är glad mun både till vänster och höger om $x = 0$ och vi har således inte någon inflektion där, trots att andra derivatan är noll. Detta visar att påståendet i uppgiften är falskt.

3. Eftersom Täljarpolynomets gradtal är 3 som ett större än gradtalet 2 för nämnarpolynomet så har funktionen en sned asymptot. Polynomdivision ger:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 3 \\
\hline
x^2 + 4x + 2 & x^3 + x^2 + 2x - 1 \\
 & -x^3 - 4x^2 - 2x \\
\cline{2-2}
 & -3x^2 \qquad\quad - 1 \\
 & \ 3x^2 + 12x + 6 \\
\cline{2-2}
 & \ 12x + 5
\end{array}
$$

Asymptoten står därupp och är i vårt fall $x - 3$. Vår funktion kan skrivas

$$\frac{x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 + 4x + 2} = x - 3 + \frac{12x + 5}{x^2 + 4x + 2}$$

där den andra termen blir liten när x blir stor.

4. En förutsättning för att vi ska kunna använda andraderivatan för att testa max/min är att funktionen har en kritisk punkt i $x = 1$, dvs det krävs att $f'(1) = 0$. Att andra derivatan är positiv betyder bara att grafen är böjd så att den påminner om en glad mun...

5. Det här är en av ett antal viktiga räkneregler för integralen.

6. Integralkalkylens fundamentalsats hjälper oss derivera denna funktion:

$$f'(x) = g(x)^2$$

och denna funktion är aldrig negativ eftersom kvadraten av ett tal alltid är ickenegativ.

7. ::

Lösning:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sqrt{x}}{\sin x-\sqrt{x}} =< \frac{0}{0} >= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin x+\sqrt{x}\right)'}{\left(\sin x-\sqrt{x}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\cos x+1/\left(2\sqrt{x}\right)\right)}{\left(\cos x-1/\left(2\sqrt{x}\right)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(2\sqrt{x}\cos x+1\right)}{\left(2\sqrt{x}\cos x-1\right)}$$

$$= \frac{\left(2\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\cos x+1\right)}{\left(2\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\cos x-1\right)} = \frac{0+1}{0-1} = -1.$$

En alternativ lösning:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sqrt{x}}{\sin x-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin x/\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sin x/\sqrt{x}-1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x}(\sin x)/x+1\right)}{\left(\sqrt{x}(\sin x)/x-1\right)} = \frac{\left(\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)/x+1\right)}{\left(\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)/x-1\right)} = \frac{0\cdot 1+1}{0\cdot 1-1} = -1.$$

En version till:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sqrt{x}}{\sin x-\sqrt{x}} =< t=\sqrt{x}, x=t^2 >= \lim_{t\to 0}\frac{\left(\sin t^2+t\right)}{\left(\sin t^2-t\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(t^2+o\left(t^2\right)+t\right)}{\left(t^2+o\left(t^2\right)-t\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(t+o(t)+1\right)}{\left(t+o(t)-1\right)} = \frac{0+1}{0-1} = -1.$$

8.

$$f'(x) = \frac{(x\cdot\arctan x)'(1+x^2)-(x\arctan x)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

Eftersom

$$(x\cdot\arctan x)' = \arctan x + x\frac{1}{1+x^2}, \qquad \text{och } (1+x^2)' = 2x$$

så får vi

$$\begin{aligned} f' &= \frac{(\arctan x+\frac{x}{1+x^2})(1+x^2)-(x\arctan x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{(1+x^2)\arctan x + x - 2x^2\arctan x}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{x+(1-x^2)\arctan x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

9. Börja med att faktorisera täljaren: $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$.
Man ser därför att man kan förkorta integranden så att vår integral blir

$$I_3 = \int \frac{x+2}{(x-2)(x+3)}dx$$

Partialbråksuppdelning::

$$\frac{x+2}{(x-2)(x+3)} = \frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}$$

Handpåläggning ger att $B = 4/5$ och $C = 1/5$.

Om man missar ovanstående faktorisering så kan vi ändå ställa upp Partialbråksuppdelningen:

$$\frac{x^2+3x+2}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

Handpåläggningsmetoden ger här $A = 0$ (som vi får pga att -1 är nollställe till integrandens täljare, så det är ingen fara alltså om man glömmer faktoriseringen), $B = 4/5$ och $C = 1/5$,

Båda fallen gör att vår integral blir

$$I_3 = \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{4}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{5}\ln|x+3| + C$$

10. Uppgiften kräver först en substitution:

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx = \left[u = \ln x, du = \frac{dx}{x}\right] = \int \ln u du = \int 1 \cdot \ln u \; du$$

Den sistna integralen kräver sedan partiell integration:

$$\int 1 \cdot \ln u \; du = u\ln u - \int u \cdot \frac{1}{u}\; du = u\ln u - \int du = u\ln u - u + K$$

Slutligen substituerar vi tillbaka till x-variabeln:

$$u\ln u - u + K = (\ln x)(\ln(\ln x)) - \ln x + K$$

11. Det verkar vara läge för partialbråksuppdelning. Men innan vi gör detta behöver vi se om nämnaren kan faktoriseras ytterligare. Vi får att polynomet $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ som ger oss ickereella nollställen. Vi kan således inte faktorisera ytterligare...

Ansats för partialbråksuppdelningen blir nu

$$\frac{x^2+3x+1}{(x-1)(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x^2-2x+2)}$$

Handpåläggning ger oss $A = 5$ och vi löser ut de övriga genom att sätta denna ekvation på gemensamt bråkstreck som ger oss följande polynomekvation för täljarna:

$$x^2 + 3x + 1 = A(x^2 - 2x + 2) + (Bx + C)(x - 1) = (A + B)x^2 + (-2A - B + C)x + 2A - C,$$

från vilket vi får ekvationssystemet (eftersom koeffecienterna för de båda sidornas polynom måste vara lika)

$$\begin{aligned} 2A - C &= 1 \\ -2A - B + C &= 3 \\ A + B &= 1 \end{aligned}$$

Vi får alltså att $B = 1 - A = -4$ och $C = 2A - 1 = 9$, varför vår partialbråksuppdelning ger följande förenkling av vår integral:

$$I_2 = \int \frac{x^2+3x+1}{(x-1)(x^2-2x+2)}dx = \underbrace{\int \frac{5}{x-1}dx}_{I_{21}} + \underbrace{\int \frac{-4x+9}{(x-1)^2+1}dx}_{I_{22}}$$

Observera att vi gjort en kvadratkomplettering för nämnarpolynomet::

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1$$

Den första integralen är lätt att beräkna och blir $I_{21} = 5\ln|x-1]$, medan den andra behöver ägnas lite tid åt: Tack vare kvadratkompletteringen kan vi få en förenkling med substitutionen, $t = x - 1, \quad dt = dx$ som ger oss

$$\begin{aligned}
I_{22} &= \int \frac{-4x+9}{(x-1)^2+1}dx = \int \frac{-4(x-1)+5}{(x-1)^2+1}dx = \text{[substituera här]} \\
&= \int \frac{-4t+5}{t^2+1}dt = -2\int \frac{2t}{t^2+1}dt + 5\int \frac{dt}{1+t^2} = \\
&= -2\ln(t^2+1) + 5\arctan t = \\
&= -2\ln((x-1)^2+1) + 5\arctan(x-1)
\end{aligned}$$

Vår integral blir därmed

$$I_2 = I_{21} + I_{22} = 5\ln|x-1] - 2\ln((x-1)^2+1) + 5\arctan(x-1) + K$$

12. (a) Grafritning

Polynomets nollställen :: Termen 6 är produkten av polynomets nollställen, vilket ger att om vi antar att nollställena är heltal så måste vi leta nollställena bland faktorerna till 6 som är $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Sätter vi in dessa tal i polynomet så ser vi att $1, 2, -3$ är våra tre nollställen!

Polynomets derivata :: Derivatan blir: $3x^2 - 7$ varför de kritiska punkterna blir $\pm\sqrt{\frac{7}{3}} = \pm\frac{\sqrt{21}}{3}$. Derivatan kan därför faktoriseras som (två alternativ beroende på sättet vi uttrycker rötterna på)

$$-\frac{1}{3}\left(\sqrt{21} - 3x\right)\left(3x + \sqrt{21}\right) = 3\left(x - \sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$$

och med faktoriseringen kan man göra en teckenstudium som visar att derivatan är positiv till vänster om $-\frac{\sqrt{21}}{3} = -\sqrt{\frac{7}{3}}$, negativ mellan $\frac{-\sqrt{21}}{3}$ och $\frac{\sqrt{21}}{3}$ och positiv till höger om $\frac{\sqrt{21}}{3} = \sqrt{\frac{7}{3}}$. Kring origo så är det största intervall med konstant tillväxt (negativ i vårt fall) intervallet $[-\frac{\sqrt{21}}{3}, \frac{\sqrt{21}}{3}]$. På detta intervall har funktionen invers och är det största intervall kring origo med invers.

Andraderivatan :: $f''(x) = 6x$ som har ett nollställe då $x = 0$. Vi ser att detta är en inflexionspunkt eftersom andraderivatan byter tecken här.

Klassificering av kritiska punkter :: Andraderivatan är negativ till vänster om origo och positiv till höger vilket ger att vår negativa kritiska punkt blir ett max och till höger har vi ett min eftersom andra derivatan är positiv.

Rita grafen :: Se figur 4

(b) Bestämning av inversintervall:

Från föregående uppgift så ser vi att kring origo så har vi intervallet $[\frac{-\sqrt{21}}{3}, \frac{\sqrt{21}}{3}]$ mellan de två kritiska punkterna. Här är funktionen avtagande och detta innebär att funktionen har invers på detta intervall. Det är det största intervallet eftersom om vi ökar så passerar vi förbi ett lokalt max eller ett min vilket då gör att varje y ger två x nära detta max/min och omöjliggör att vi kan fortsätta inversen förbi dessa max/min.

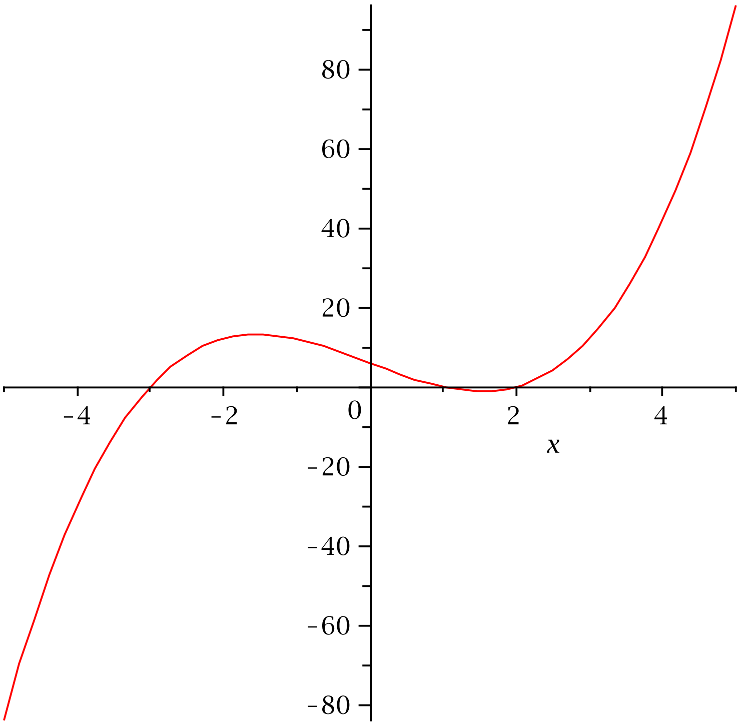

Figure 4: Graf till uppgift 12

13. Tredje ordningens MacLaurinpolynom är tillsammans med sin felterm ::

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3, \qquad E_3(x) = \frac{f^{(4)}(s)}{4!}x^4, \quad s \text{ mellan } x \text{ och } 0$$

Vi behöver alltså beräkna fyra derivator till $\arctan x$

$$\begin{aligned}
f(0) &= \arctan 0) = 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, \quad f'(0) = 1 \\
f''(x) &= -\frac{2x}{(x^2+1)^2}, \quad f''(0) = 0 \\
f'''(0) &= \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}, \quad f'''(0) = -2 \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{24x\left(x^2-1\right)}{(x^2+1)^4} \quad \Rightarrow \quad E_3(x) = -\frac{24s\left(s^2-1\right)}{(s^2+1)^4} \cdot \frac{x^4}{4!} = -\frac{s\left(s^2-1\right)}{(s^2+1)^4}x^4
\end{aligned}$$

:
:
:
Pust
och
stön!
...
men
nyttig
deriverings-
övning...:
:
:
:
:
:
:
:

MacLaurinPolynomet med närmevärdet till $\arctan 1$ blir

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{3}, \qquad p_3(1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Vi uppskattar absolutbeloppet av feltermen och behöver därför ta reda på hur funktionen varierar över intervallet $0 < s < 1$. Detta leder till den antydda extrauppgiften ::

Extrauppgift :: Bestäm max och min för $-\frac{s(s^2-1)}{(s^2+1)^4}$ och rita dess graf. Se figur 5

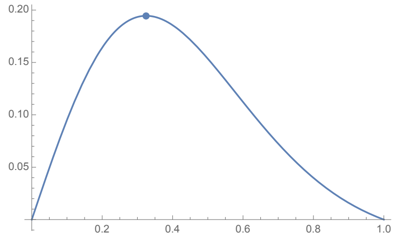

Figure 5: Här är absolutbeloppet av felfunktionen: $-\frac{s(s^2-1)}{(s^2+1)^4}$ över intervallet $[0,1]$. Maximum för denna funktion sker vid s_o. Uppskattning för värsta situation bör använda detta värde men ni rekommenderades i hinten att använda det närliggande $s = 1/3$.

Vi får ::

$$|E_3(1)| = \left| -\frac{s\left(s^2-1\right)}{\left(s^2+1\right)^4} 1^4 \right| < \frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{9})}{(\frac{1}{9}+1)^4} = \frac{243}{1250} = \frac{1944}{10000} = 0.1944$$

Vårt närmevärde med feluppskattning blir därför

$$\frac{2}{3} \pm \frac{243}{1250} = 0.6666 \pm 0.1944 \quad \Rightarrow \quad \arctan 1 \in [0.4722, 0.8610]$$

Det rätta värdet är $\arctan 1 = \pi/4 \approx 0.7854$.

14. Området Ω ritas upp i figur 6, tillsammans med masscentrum/centroiden.

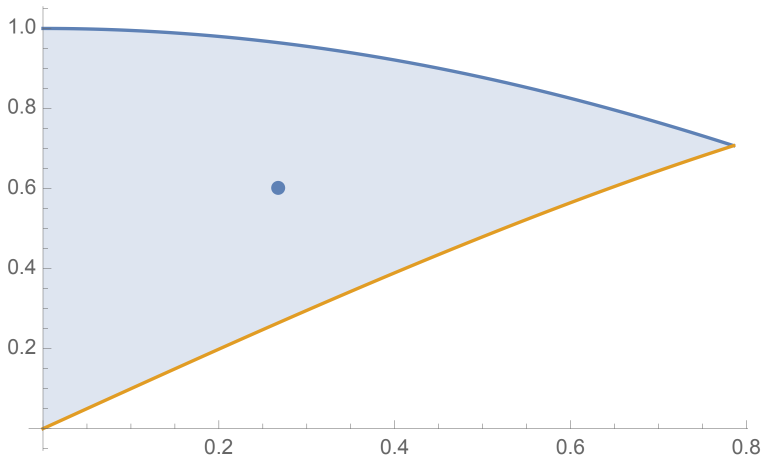

Figure 6: Figur till uppgift 14 med området Ω skuggat, och masscentrum/centroiden markerat.

Vi börjar med att beräkna arean/massan:

$$M = \int_0^{\pi/4} \cos x - \sin x dx = [-\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1$$

Sedan beräknar vi momentet m.a.p. y-axeln

$$
\begin{aligned}
M_{x=0} &= \int_0^{\pi/4} x(\cos x - \sin x)dx = [\text{ partiell integration }] = \\
&= [\ x(\sin x + \cos x)\ ]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \sin x + \cos x dx = \\
&= \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - (-\cos x + \sin x)_0^{\pi/4} = \\
&= \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - ((\underbrace{-\cos(\pi/4) + \sin \pi/4}_{=0}) - (-\cos 0 + \sin 0)) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - 1 = \\
&= \frac{\pi\sqrt{2} - 4}{4}
\end{aligned}
$$

Nu beräknar vi momentet m.a.p. x-axeln. Här behöver vi använda de trigonometriska formlerna

$$
\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \qquad \text{och} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}
$$

Vi integrerar ::

$$
\begin{aligned}
M_{y=0} = &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x)dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx = \left[\frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\sin \pi/2}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Slutligen kan vi beräkna masscentrum/centroiden ::

$$
\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{M} = \frac{\sqrt{2}\pi - 4}{4\left(\sqrt{2} - 1\right)} \qquad \text{och} \qquad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{M} = \frac{1}{4\left(\sqrt{2} - 1\right)}
$$

Var masscentrum/centroiden är lokaliserad visas i figur 6.